

تطبيق خوارزمية أسية هيرست المحدث على سلسلة غذائية متقطعة الزمن

محمد أمير حامد**

د. ميسون مال الله عزيز*

الملخص

تم في هذا البحث دراسة ثبات التوصل والبعد الكسوري ومؤشر قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية ذات الزمن المتقطع والمتميزة بنظام ثلاثي ذات المعادلات الفرقية اللاخطية، حيث تم إيجاد المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية من خلال التكرارات العددية، وتحليل الاستقرارية وتحديد التوازنات والنقاط الثابتة لهذا النظام الحركي. تم حساب قيم أسية هيرست المحدث (H) لحساب البعد الكسوري (D)، مؤشر قابلية التنبؤ (PI_F) للسلسلة الغذائية. ولمعرفة مدى انتظام هذه السلسلة تم تحليل الخصائص الأساسية للنظام من خلال فضاء الطور، مخططات التشعب، والاختبار الثنائي (1-0) للفوضى، حيث استخدمت لغات البرمجة الحديثة الإصدار (16.1) maple و (7.14) matlab. أظهرت نتائج التحليل أن قيم أسية هيرست المحدث للسلسلة الغذائية هي ضد ثبات التوصل في أكثر حالاته، وأن لبعض قيم المعلمات نقطة التوازن الداخلي تفقد استقرارها من خلال مخطط التشعب. كلمات البحث: أسية هيرست، البعد الكسوري، مؤشر قابلية التنبؤ، اختبار (1-0)، سلسلة غذائية متقطعة الزمن.

Application Modified Hurst Exponent algorithm for the discrete-time food chain

Abstract

In this paper, persistence, fractal dimension, and predictability index a discrete-time food chain characterized by three species is modeled by a system of three nonlinear difference equations have been studied, where to find the time series of chain food by numerical iterations, stability analysis, identify equilibrium, and fixed points of this dynamic system. The values of modified Hurst exponent (H), fractals dimension (D), and predictability index (PI_F) for a food chain were calculated. To know the regularity of the chain by phase space, bifurcation diagrams, and the binary (0-1) test for chaos have been analyzed the basic characteristics of the system. Where modern programming languages Version (maple(16.1) and matlab(7.14)) used.

* أستاذ مساعد / قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

** باحث / قسم قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

The results of analysis show that the values of modified Hurst exponent is anti-persistent in most cases the food chain, and that some of the values of the parameters internal equilibrium point loses its stability through bifurcation diagrams.

1. المقدمة

(Introduction)

في السنوات الأخيرة أولي الاهتمام الكبير إلى نماذج الزمن المتقطع للمجتمعات في علم الأحياء والبيئة، يمكن القول أن النماذج في الزمن المتقطع الموصوفة على شكل معادلات فرقية أكثر ملائمة من النماذج في الزمن المستمر عندما تمتلك المجتمعات أجيال غير متداخلة (Raj et al.,2013)، وكذلك أكثر ملائمة في تحديد سلوك المدار بواسطة تكرار الدالة لعمليات المحاكاة العددية. نظرية المجتمعات الرياضية والتي تمثل الايكولوجيا للمجتمعات والتي هي فرع من علم البيئة الذي يستخدم فيه معادلات رياضية لوصف التفاعلات بين الأنواع والتي تعود إلى مalthus الذي يتناول دراسة المجتمعات من النوع الواحد (Malthus,1798). فالسلسلة الغذائية هي إحدى العلاقات الأساسية من بين هذه الأنواع في دراسة البيئة، التفاعل يتكون من اثنين أو ثلاثة أنواع في النظام الإيكولوجي ذات الأهمية العملية. على سبيل المثال، يصف نموذج لوكاتا (Lotka,1925) و فولتيرا (Volterra,1962) نوعين من التفاعلات في النظام الإيكولوجي، فريسة ومفترس، ليتم تطوير النموذج بشكل مستقل من قبل العديد من علماء الرياضيات هولينك (Holling,1965) اقترح ثلاثة أنواع من الدوال لنمذجة ظواهر الافتراض. بعدها تمت دراسة حركات النموذج الثنائي من قبل العديد من الباحثين لشبكات الغذاء الإيكولوجية أو سلاسل الغذاء التي تحتوي على عدة طبقات. هذه النماذج تشكل الأنظمة الحركية المبددة والتي يمكن أن تمتلك ثلاثة احتمالات حركية متميزة مثل التوازن المستقر، نظام الفوضى، والأبعاد الكسورية. في العقدين الماضيين أظهرت بعض من البحوث النظم الحركية المعقدة جدا والتي يمكن أن تنشأ في الزمن المستمر للسلسلة الغذائية من ثلاثة أنواع أو أكثر. على سبيل المثال، أظهرت هاستينغز وباول (Hastings & Powell,1991) حدوث الفوضى في النظم الحركية المستمرة لثلاثة أنواع من نماذج الأغذية، فقد كان تركيز العديد من الباحثين على دراسة نماذج السلسلة الغذائية في حالة الزمن المستمر، ومن الجانب الآخر، كان تركيز العديد من الباحثين على دراسة نماذج السلسلة الغذائية في حالة الزمن المتقطع، لتحل محل مجموعة المعادلات التفاضلية عن طريق مجموعة من المعادلات الفرقية التي هي أكثر ملائمة من تلك المستمرة عند التفاعل بين أنواع الأجيال الغير متداخلة. أنظمة الزمن المتقطع يمكن أيضا أن توفر النماذج الحسابية الأكثر كفاءة من تلك المستمرة في عمليات المحاكاة العددية. ورغم كل هذه الدراسات التي ركزت على تحليل الاستقرار، وتحليل الفوضى لنماذج

السلسلة الغذائية ، فإنه ليس هناك الكثير من الجهود المبذولة لتصنيف السلسلة، وتحليل البعد الكسوري، ومؤشر قابلية التنبؤ لنماذج السلسلة الغذائية في الزمن المتقطع كان أو في الزمن المستمر، فكان الدافع لنا للبحث في هذا الموضوع، حيث تم في هذا البحث دراسة نموذج السلسلة الغذائية ذو الزمن المتقطع المقترحة من قبل السعدني (Elsadany,2012)، حيث تم تنظيم هذا البحث على النحو التالي: وصف نموذج السلسلة الغذائية، وتحليل الاستقرار من خلال إيجاد النقاط الثابتة الخمسة، وتصنيف متسلسلته الزمنية من حيث ثبات التواصل ان كانت أو عشوائية(Hurst,1951; Mandelbrot & Wallis,1969)، مع حساب مؤشر قابلية التنبؤ المحسوب من البعد الكسوري المأخوذ من آسية هيرست المحدثه (عزيز & حامد, 2013)، كما تم تحليل الفوضى وتشخيص السلوك من خلال مؤشرات اختبار الثنائي (0-1) للفوضى (Aziz&Faraj,2012)، فضلا عن التقنيات البصرية والمحاكات العددية لتفقد استقرارها من خلال مخطط التشعب والاختبارات.

2. آسية هيرست (Hurst Exponent)

آسية هيرست هي مقياس لذاكرة المدى الطويل (Long-term memory) والبعد الكسوري للمتسلسلة الزمنية (Granero et al.,2008). ولقوة نظامها الأساسي، فقد تم تطبيقها في المجالات الواسعة لتحليل السلاسل الزمنية. مجموعة قيم آسية هيرست تكون بين $H \in [0,1]$.

التعريف (1) (Hurst,1951; Mandelbrot & Wallis,1969)

لنكن المتسلسلة الزمنية $\{X_i\}_{i=1}^n$ والتي يمكن تقسيمها إلى عدد قليل من الفترات الجزئية بطول (t) حيث إن $(t = 1, 2, \dots, n)$ ، فإن آسية هيرست (H) يعرف بأنه السلوك المتقارب للمدى المتغير (Rescaled Range) والذي يرمز له (R_t/S_t) كدالة في الفترة الزمنية من متسلسلة زمنية على النحو التالي:-

$$0 \leq H \leq 1 \text{ and } t \rightarrow \infty \text{ as}$$

$$E \left[\frac{R_t}{S_t} \right] = C * t^H$$

حيث $E \left[\frac{R_t}{S_t} \right]$ التوقع للمدى المتغير للزمن (t)، (C) هي قيمة ثابتة، (H) هي آسية هيرست.

التعريف (2) (Hurst,1951; Mandelbrot & Wallis,1969)

تصنف المتسلسلة الزمنية $\{X_i\}_{i=1}^n$ بأنها ثبات التواصل (persistent)، إذا كانت المتسلسلة متناقصة في الفترة الحالية، ومتناقصة في الفترة المستقبلية مباشرة، أو إذا كانت المتسلسلة متزايدة في الفترة الحالية، ومتزايدة في الفترة المستقبلية مباشرة، أي لها سلوك ارتباطي ذاتي ايجابي (Positive autocorrelation).

التعريف (3) (Hurst,1951; Mandelbrot & Wallis,1969)

تصنف المتسلسلة الزمنية $\{X_i\}_{i=1}^n$ بأنها ضد ثبات التواصل (anti-persistent)، إذا كانت المتسلسلة متناقصة في الفترة الحالية، ومتزايدة في الفترة المستقبلية مباشرة، أو إذا كانت المتسلسلة متزايدة في الفترة الحالية، ومتناقصة في الفترة المستقبلية مباشرة، أي لها سلوك ارتباطي ذاتي سلبي (negative autocorrelation).

المدى المتغير (Rescaled Range)

المدى المتغير يستخدم لتقدير أسية هيرست (H). وتشير الدراسات إلى أنه ليس هناك طريقة واضحة لتقدير دقيق لأسية هيرست في جميع الظروف. وقد قدمت هذه الطريقة الأصلية من قبل العالم هارولد أدوين هيرست (Hurst,1951)، درس سجلات الأمطار المتقلبة وظروف الجفاف لنهر النيل، حيث استطاع هيرست تعريف المسافة المقطوعة لكل وحدة من الزمن أو العينة (t) والتي ستعطى من قبل المدى (R_t) ، حيث أن $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_t)$ تتوافق مع تغير المتغير العشوائي داخل العينة (t)، و $\bar{X}_t$ هو معدل هذه التغيرات، وان المدى (R_t) هو محدد بواسطة الانحراف المعياري (S_t) للعينة في تلك الفترة، والذي ينتج المدى المتغير $\left(\frac{R}{S}\right)_t$ للعينة (t)،

$$\left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{R_t}{S_t} = \frac{\left[\max_{1 \leq k \leq t} \left(\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_t) \right) - \min_{1 \leq k \leq t} \left(\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_t) \right) \right]}{S_t}$$

ولكن العالم ماندلبروت (Mandelbrot & Wallis, 1969)، هو من اقترح استخدام

الإحصائي (R/S) من خلال الرسم التخطيطي البياني $\log \left(\frac{R}{S} \right)_t$ Vs $\log(t)$ للعلاقة

$$\left(\frac{R}{S}\right)_t = \log(c) + H * \log(t)$$

ثم إيجاد حل الميل النسبي من الانحدار الخطي، استنادا إلى الأعمال السابقة التي قام

بها هيرست عندما أعطى العلاقة $\left(\frac{R}{S}\right)_t \approx C * t^H$. حيث أن مؤشر هيرست (H) في طريقة

(R/S) يقيس الارتباط الإحصائي للمتسلسلة الزمنية في ثلاث حالات:-

1- عندما تكون (H=0.5) فالمتسلسلة الزمنية عشوائية، أو مشي عشوائي (Random walk).

2- عندما تكون (0 ≤ H < 0.5) فالمتسلسلة الزمنية ضد ثبات التواصل.

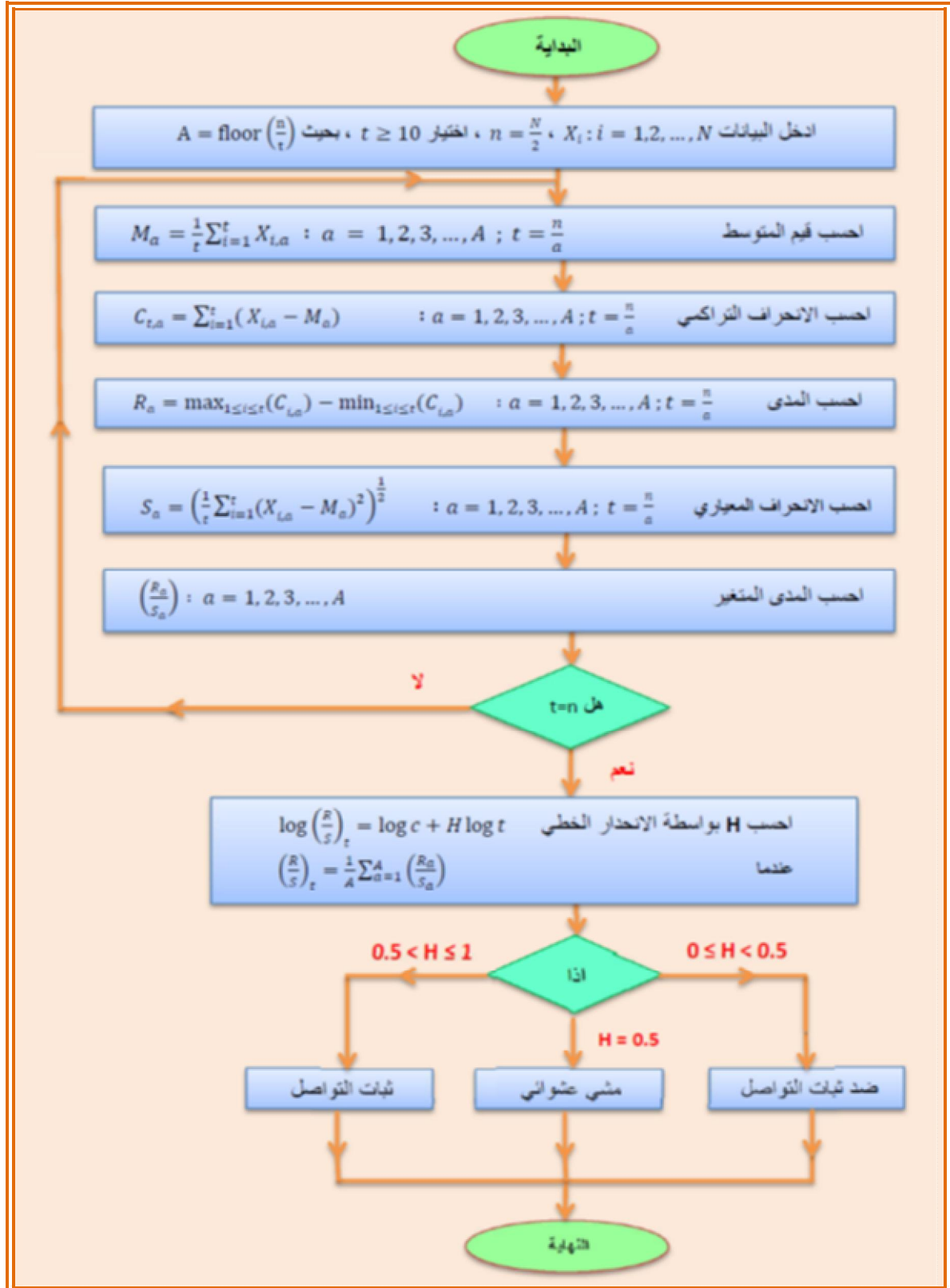
3- عندما تكون (0.5 < H ≤ 1) فالمتسلسلة الزمنية ثبات التواصل.

وقد تم تحديث خوارزمية أسية هيرست واختبارها بمقارنتها مع أسية هيرست أعلاه

لاحظ (عزيز & حامد, 2013)، والتي يمكن تلخيصها في الشكل (1)

3. وصف النموذج والمنهجية (Model Description and methodology)

الأنظمة الغذائية متقطعة الزمن تم بناء نماذجها في المناطق المعتدلة، وذلك بسبب بيئتها



الشكل (1) المخطط الانسيابي (flow chart) لآسية هيرست المحدثه

الموسمية الملائمة. حيث تم اقتراح نموذج للدراسة من هذا النوع من قبل السعدني، والمعرف من خلال نظام المعادلات الفرقية اللاخطية متقطعة الزمن لثلاثة أنواع من المستويات، وذلك باعتبار إن السلسلة الغذائية على ثلاثة أنواع من التفاعلات غير متداخلة الأجيال، حيث يفترض النوع X ذي المستوى الأدنى من قبل النوع Y ذو المستوى المتوسط، والذي بدوره يفترض من قبل المستوى الأعلى Z ، المعرف من خلال النظام التالي (Elsadany, 2012):

$$F : \begin{cases} X_{n+1} = aX_n(1 - X_n) - bX_nY_n \\ Y_{n+1} = cX_nY_n - dY_nZ_n \\ Z_{n+1} = rY_nZ_n \end{cases} \dots\dots(1)$$

حيث أن a, b, c, d, r هي معلمات هذا النظام وموجبة دائماً.

فعند غياب الافتراض، الفريسة (X) تنمو لوجستياً، وهو نوع هولينك الأول للمفترس (Y) (Holling, 1965)، ونوع هولينك الأول للمفترس (Z) ذو المستوى الأعلى. المعلمة (a) هي نسبة فعالية نمو الفريسة (X)، المعلمة (b) هي فعالية بحث المفترس (Y)، المعلمة (c) هي افتراض (X) من المفترس (Y)، المعلمة (d) هو فعالية بحث المفترس (Z)، والمعلمة (r) هي افتراض (Y) من المفترس (Z). حيث إن دراسة الخصائص الحركية للنظام (1) يبين لنا السلوك على المدى البعيد للسلسلة الغذائية للمجتمع. والتكرار في النظام (1) يكون مسار وحيد من حالات الإنتاج المجتمعي بالشكل التالي:

$$(X_t, Y_t, Z_t) = F^t(X_0, Y_0, Z_0), t = 0, 1, 2, \dots$$

فبعد إيجاد المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية عن طريق التكرار العددي في النظام (1)، تم حساب البعد الكسوي (D) للمتسلسلة الزمنية باستخدام الصيغة (Granero et al., 2008):

$$D = 2 - H \dots\dots\dots(2)$$

ومن ثم حساب مؤشر قابلية التنبؤ بواسطة الصيغة (Mittal & Bhardwaj, 2011):

$$PI = 2|D - 1.5| \dots\dots\dots(3)$$

بحيث يكون مؤشر قابلية تنبؤ المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية يحسب كالآتي:

$$PI_X = 2|D_X - 1.5|$$

$$PI_Y = 2|D_Y - 1.5|$$

$$PI_Z = 2|D_Z - 1.5|$$

لإيجاد مؤشر قابلية التنبؤ (PI_F) فإنه يتم حسابها عن طريق المتغيرات الثلاثة (X, Y, Z) كما يلي:

$$PI_F = (PI_X, PI_Y, PI_Z)$$

بحيث أن (PI_F) مؤشر قابلية تنبؤ المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية، (PI_X) مؤشر قابلية التنبؤ للمتغير (X) ، (PI_Y) مؤشر قابلية التنبؤ للمتغير (Y) ، (PI_Z) مؤشر قابلية التنبؤ للمتغير (Z) ، وان (D) هو البعد الكسوري المحسوب حسب دليل مؤشر قابلية التنبؤ. فإذا كان احد عناصر مؤثرات قابلية التنبؤ PI_X, PI_Y, PI_Z يقترب من الصفر، فإن مؤشر قابلية تنبؤ المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية هي حركة براونية أو عشوائية (Rehman,2009)، أما إذا كان احد المؤثرات قيمته مقاربة للواحد فعندها تزداد مؤشر قابلية تنبؤ المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية.

4. تحليل الاستقرار للنقاط الثابتة (Stability analysis of the fixed points)

نظرية النظم الحركية اللاخطية شهدت تطور في العقود الأخيرة من حيث توجدها في تطبيقات المجالات المختلفة بما في ذلك علم الأحياء للمجتمعات، ولذلك فقد اهتم الباحثين بدراستها التحليلية، ولتحليل هذه النظم فان الأسلوب المهم منها هو تحليل سلوك الحلول بالقرب من نقطة التوازن باستخدام الخطية، وان احد هذه المشاكل التي تتطلب الاهتمام بها هي استقرار النظم الإيكولوجية، ولذلك تم دراسة سلوك حلول المعادلات الفرقية اللاخطية، بحيث توفر نقطة التوازن للنظام كنقطة ثابتة غير سالبة من خلال العلاقة التالية:

$$\left. \begin{aligned} X &= aX(1-X) - bXY \\ Y &= cXY - dYZ \\ Z &= rYZ \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

فمن خلال حل (4) نحصل على خمسة نقاط ثابتة هي:-

$$P_1 = (0,0,0), P_2 = \left(\frac{a-1}{a}, 0, 0 \right), P_3 = \left(\frac{1}{c}, \frac{ac-a-c}{cb}, 0 \right), P_4 = \left(0, \frac{1}{r}, \frac{-1}{d} \right),$$

$$P_5 = \left(\frac{r(a-1)-b}{ar}, \frac{1}{r}, \frac{ar(c-1)-c(b+r)}{adr} \right)$$

فمن الواضح P_1, P_2, P_3, P_4 هي نقاط التوازن الحدودي (boundary) وان P_5 هي نقطة التوازن الداخلي للنظام. ولدراسة السلوك الحركي للنقاط الثابتة في النظام الثلاثي (1)، يجب حساب القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي (Elaydi,2008). حيث ان مصفوفة جاكوبي للنظام (1) للمتغيرات (X,Y,Z) تكون بالشكل الآتي:

$$J(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} a(1-2X) - by & -by & 0 \\ cY & cX - dz & -dY \\ 0 & rZ & rY \end{bmatrix} \dots\dots(5)$$

وان محددة مصفوفة جاكوبي (5) هي

$$|J(X, Y, Z)| = acrXY(1-2X)$$

فيقال إن نظام (1) مبدد (dissipative) إذا كانت محددة المصفوفة أقل من واحد (Wiggins,1990) أي:

$$|acrXY (1 - 2X)| < 1 \quad \dots\dots (6)$$

وبما ان معلمات النظام (1) هي موجبة دائما ، وبعد تبسيط (6) نحصل على العلاقة التالية:

$$|XY (1 - 2X)| < \frac{1}{acr} \quad \dots\dots (7)$$

فمن خلال تعويض المعلمات والمتغيرات في (7)، نحصل على معرفة مدى انتظام النظام (1) وهل هو مبدد أم لا. ولدراسة استقرار النقاط الثابتة للنظام (1)، علينا أولاً إيجاد القيم الذاتية للنقاط الثابتة، حيث أن هذه القيم تمثل التوازن والاستقرارية، فتعويض النقاط الثابتة في (5) نحصل على القيم الذاتية الآتية:-

$$P_1 \xrightarrow{\text{Eigenvalue s}} \lambda_1 = a, \lambda_{2,3} = 0$$

$$P_2 \xrightarrow{\text{Eigenvalue s}} \lambda_1 = 2 - a, \lambda_2 = \frac{c(a-1)}{a}, \lambda_3 = 0$$

$$P_3 \xrightarrow{\text{Eigenvalue s}} \lambda_1 = \frac{r(ar - a - c)}{cb}, \lambda_{2,3} = \frac{2c - a \pm \sqrt{4c^2 + 4ac + a^2 - 4ac^2}}{2c}$$

$$P_4 \xrightarrow{\text{Eigenvalue s}} \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \frac{ar - b}{r}$$

أما بالنسبة للقيم الذاتية للنقطة الثابتة P_5 فان نتائجها متشعبة جدا.

فمن خلال ملاحظتنا لجميع القيم الذاتية نرى أن جميعها تعتمد اعتمادا رئيسيا على المعلمتين a و c فمن خلالها يمكن معرفة توازن واستقرارية النظام (1)، ولتحديد نوعية النقاط الثابتة للنظام (1)، سوف نستخدم المبرهنة (1).

المبرهنة (1) (Elaydi,2008)

$$F(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \quad \dots\dots (8) \quad \text{لتكن}$$

هي المعادلة المميزة للمصفوفة (5)، فان العبارات التالية تكون صحيحة:

- 1- إذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر في المعادلة (8) أقل من واحد، فالنقطة الثابتة للنظام (1) مستقرة محليا بالمحاذاة (locally asymptotically) وتسمى بالحوض (sink).
- 2- إذا كان على الأقل احدى القيم المطلقة لجذور المعادلة (8) أكبر من واحد، فإن النقطة الثابتة للنظام (1) غير مستقرة وتسمى بالسرج (saddle).
- 3- إذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر في المعادلة (8) أكبر من واحد، فإن النقطة الثابتة للنظام (1) غير مستقرة وتسمى بالمنبع (source).
- 4- يطلق على النقطة الثابتة للنظام (1) بالزائدي (hyperbolic) إذا لم يكن هناك جذور في المعادلة (8) قيمتها المطلقة مساوية للواحدة. أما إذا كان لها جذور في المعادلة (8) قيمتها المطلقة مساوية للواحد فتسمى اللازائدي (non-hyperbolic).

5. اختبار الفوضى الثنائي (1-0) (The Binary (0-1) Test for Chaos)

الاختبار الثنائي (1-0) هو اختبار للفوضى والذي تم اقتراحه من قبل العالمين كوتولد وملبورن (Aziz & Faraj, 2012) والتي تم تطبيقها على المتسلسلات الزمنية، حيث إنها لا تحتاج إعادة بناء فضاء الطور، أي أن المدخلات تكون بيانات المتسلسلة الزمنية، والإخراج يكون قيمة قريبة جدا من الصفر عندما يكون فوضوي أو يكون قيمة قريبة جدا من الواحد عندما يكون منتظم. هذا الاختبار يمكنه التمييز فقط بين النظام الحركي أو الظاهرة الفيزيائية مستقرة أم فوضوية، وهذا التمييز يكون واضح جدا حسب قيمة المتغير (K_c) وان ما يميزه اتجاه تقاربه إما للصفر أو للواحد. كما يتميز كونه مستقل ولا يعتمد على طبيعة البيانات التي تدخل إلى النظام، أي ليست هناك حاجة لمعرفة معادلات النظام الحركي الذي سيتم اختباره، فقط يحتاج جزء من هذه المشاهدات، فالاختبار الثنائي يتميز أيضا بتقنية عالية من التمييز الدقيق للانتقال من السلوك الطبيعي (الدورية أو شبه الدورية) إلى حالة من الفوضى، ليكون أفضل من الطرق التقليدية الأخرى.

خوارزمية الاختبار الثنائي (1-0) (Aziz & Faraj, 2012)

لوصف خوارزمية الاختبار، سوف نحتاج الخطوات التالية

- 1- إدخال المتسلسلة الزمنية $X(i), i=1,2,3,...,T$
- 2- نحسب المتغيرات الاتجاهية

$$q_c(t) = \sum_{i=1}^t X(i) * \sin(i * c), \quad p_c(t) = \sum_{i=1}^t X(i) * \cos(i * c) \quad \dots\dots(9)$$

بحيث $c \in (0, \pi), t=1,2,3,...,T$ ، وان $p_c(t), q_c(t)$ تكون في حالتين هما

- أ- مقيدة (bounded) إذا كانت السلسلة منتظمة (دورية، شبه دورية (quasi periodic)).
- ب- تسلك سلوكا محاذيا مشابه للحركة البراونية أو خطيا إذا كانت المتسلسلة فوضوية.
- 3- نحسب متوسط مربع الإزاحة ($M_c(t)$) للمتغيرات الاتجاهية $p_c(t), q_c(t)$ المعرفة في (9) لبعض قيم $c \in (0, \pi)$ حيث إن ($M_c(t)$) معرف بالعلاقة التالية:-

$$M_c(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left[[p_c(i+t) - p_c(i)]^2 + [q_c(i+t) - q_c(i)]^2 \right] \dots\dots(10)$$

ولحساب متوسط مربع الإزاحة الجديدة ($M_c(t)$) من خلال التعويض والتبسيط باستخدام العلاقة:

$$M_c(t)_{new} = M_c(t)_{old} - \frac{1 - \cos(tc)}{1 - \sin(tc)} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T E(j) \right)^2$$

نلاحظ أن هذا التعريف يتطلب $t \ll T$ لحساب متوسط مربع الإزاحة ($M_c(t)$) مباشرة باستخدام

(10). موفرين الحد الأقصى عن طريق حساب ($M_c(t)$) فقط لـ $t \leq t_{cut}$ ، حيث $t_{cut} \ll T$.

من الناحية العملية نجد أن $t_{cut} = T/10$ تعطي نتائج جيدة. وان $(M_c(t))$ تكون إحدى الحالتين:-

أ- $M_c(t)$ هو ينمو خطيا مع الزمن، أي فوضوي.

ب- $M_c(t)$ هو مقيد مع الزمن، أي منتظم.

4- أسلوب الانحدار يتكون من الانحدار الخطي للرسم البياني لـ $\log - \log$ المتمثل لـ $M_c(t)$. وبالتالي فإن معدل النمو يكون محاذيا لـ (K_c) التي تعطى بواسطة العلاقة:-

$$k_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log M_c(t)}{\log(t)}$$

عدديا، يتم تحديد (K_c) عن طريق تركيب خط مستقيم للرسم البياني من $\log M_c(t)$ عكس $\log(t)$ مع تقليل الانحراف المطلق.

5- نحسب (K) التي هي الأوسط للقيم والتي يرمز لها (K_c) حيث إن $c \in (0, \pi)$ ، فإذا:-

أ- $K \approx 1$ فإن السلسلة الزمنية فوضوية.

ب- $K \approx 0$ فإن السلسلة الزمنية منتظمة.

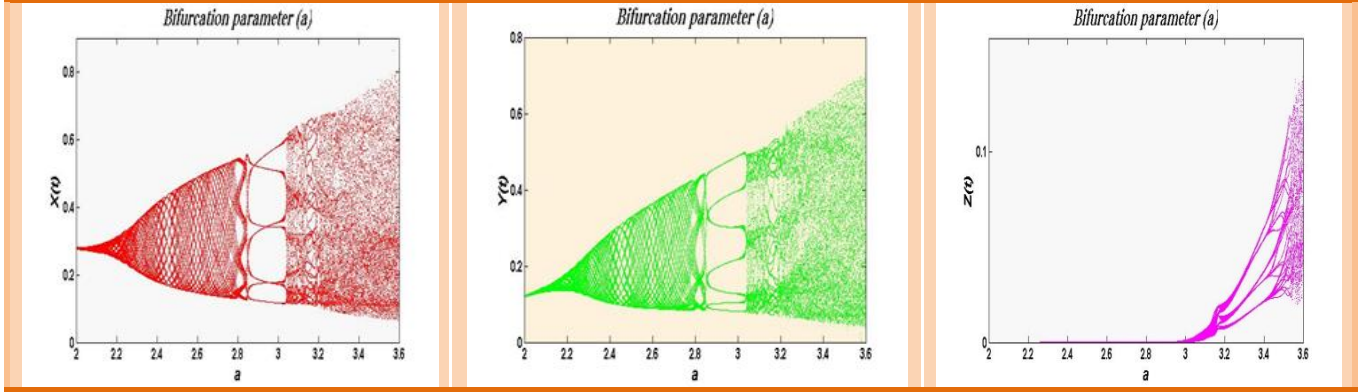
6. مخططات التشعب (Bifurcation Diagrams)

مخططات التشعب هي إحدى الطرق لعرض النقاط المتكونة من تفرع عائلة المعلمات للدالة أو نظام المعادلات والتي تعطي السلوك عند التكرارات العليا لكل قيم معلمات التشعب، وتعتبر من التقنيات البصرية الجيدة لمشاهدة الفوضى، فالبيانات وحدها من الصعب أن نستنتج منها ما إذا كان السلوك منتظم أم فوضوي، فإذا كانت التشعبات تتكرر عند تغيير معلمة التشعب، ذلك يؤدي إلى السلوك الفوضوي، حيث المتسلسلة الزمنية المتولدة تتمثل في المحور العامودي، بينما المحور الأفقي يمثل عائلة معلمة التشعب.

7. المحاكاة العددية (Numerical Simulations)

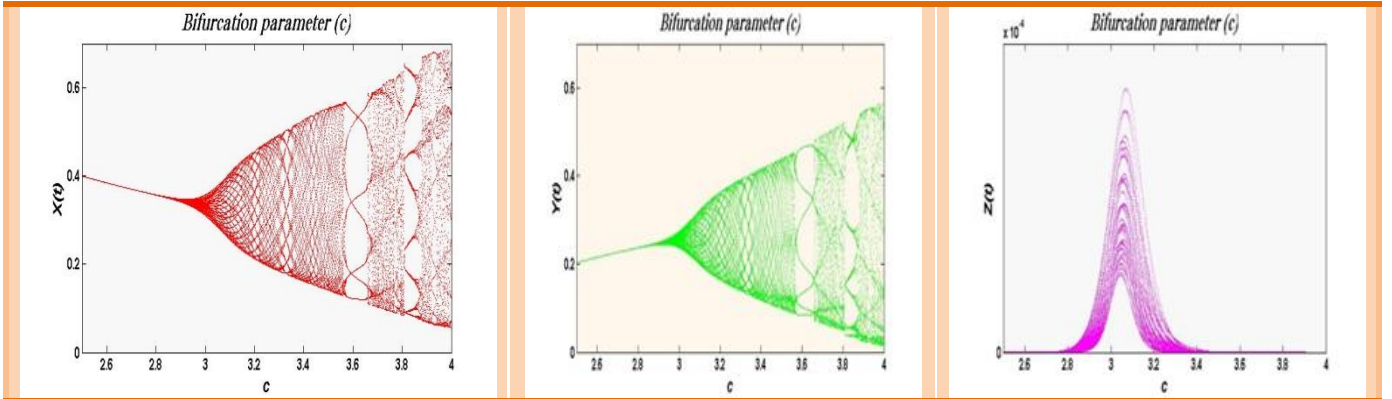
بعد دراسة الجانب النظري للبحث، ولمعرفة مدى استقرار النظام (1)، حيث أننا نتعامل مع تطبيق ثلاثي لا خطي، إذ أن الأدوات النظرية لإثبات وجود السلوك الفوضوي في ثلاثي الأبعاد لا تزال ضعيفة للغاية حتى الآن، لذلك قمنا بإيجاد بعض نتائج المحاكاة العددية للتحقق من وجود الفوضى والتشعبات من خلال الحلول الدورية الناشئة من التشعب المتقطع وإظهار أهمية وتعقيد بعض السلوكيات الحركية في الزمن المتقطع للسلسلة الغذائية، ولإيجاد النتائج تم استخدام لغات البرمجة الحديثة الإصدار (16.1) maple و (7.14) matlab. فمن خلال دراسة الاستقرار للنظام (1) وجدنا أن هذا النظام يعتمد على معلمتين رئيسيتين للتشعب هما a و c .

لإيجاد تشعب المعلمة a ، تم تثبيت المعلمات $r=3.8$ ، $d=3.5$ ، $c=3.6$ ، $b=3.7$ مع تغيير في المعلمة a ضمن الفترة [2.1,3.6] بمقدار زيادة 0.001، أما بالنسبة للمتغيرات الثلاثة مع الشروط الأولية فهي $(X_0, Y_0, Z_0)=(0.3, 0.2, 0.1)$ انظر الى الشكل (2).



الشكل (2): مخططات تشعب السلسلة الغذائية بالنسبة للمتغيرات (X, Y, Z) عندما تكون المعلمات $r=3.8$ ، $d=3.5$ ، $c=3.6$ ، $b=3.7$ مع تغيير في المعلمة a .

من خلال هذه المخططات نرى التوازن الداخلي للمعلمة a ضمن الفترة [2.8,3] والتي تمثل النقطة الثابتة P_5 المعقدة في حساب استقراريتها. أما بالنسبة لتشعب المعلمة c ، تم تثبيت المعلمات $r=3.8$ ، $d=3.5$ ، $b=3.7$ ، $a=2.92$ مع تغيير في المعلمة c ضمن الفترة [2.5,4] بمقدار زيادة 0.001، أما المتغيرات الثلاثة فهي تشبه الشروط الأولية السابقة انظر إلى الشكل (3).

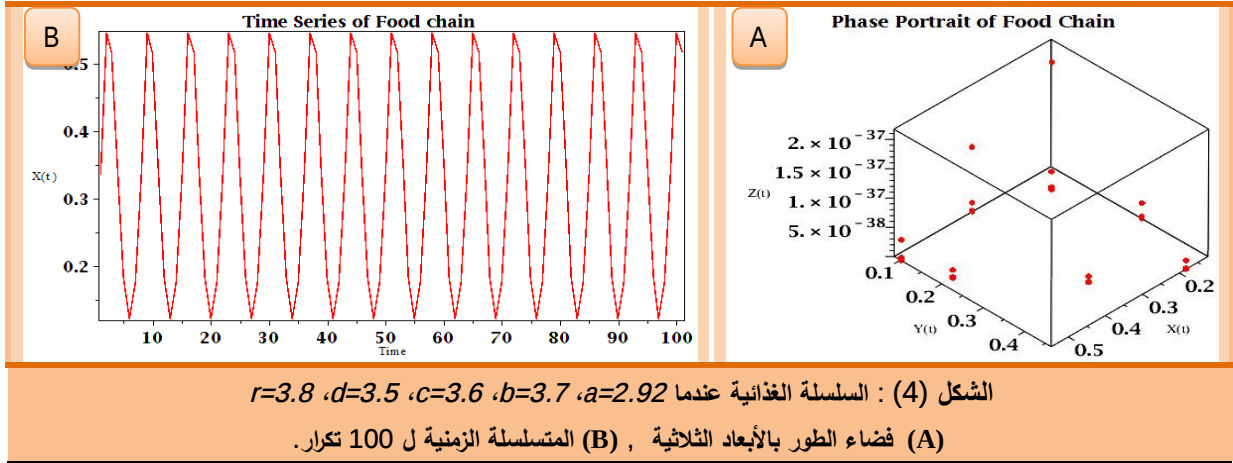


الشكل (3): مخططات تشعب السلسلة الغذائية بالنسبة للمتغيرات (X, Y, Z) عندما تكون المعلمات $r=3.8$ ، $d=3.5$ ، $b=3.7$ ، $a=2.92$ مع تغيير في المعلمة c .

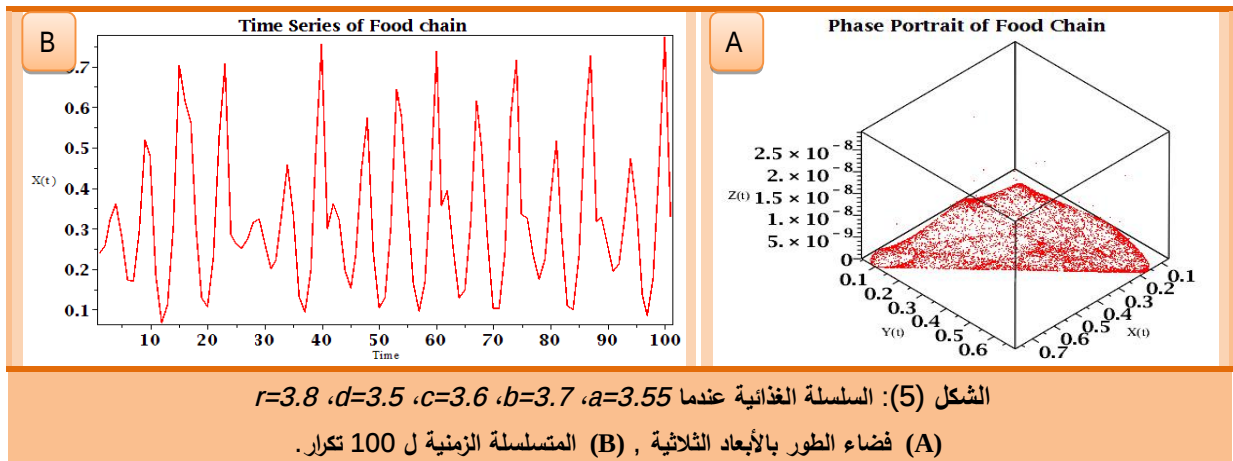
حيث نرى من خلال المخططات التوازن الداخلي للمعلمة c ضمن الفترة [3.55,3.65] والتي تمثل النقطة الثابتة P_5 المعقدة.

فمن خلال هذه مخططات التشعب يمكننا من تمييز حالات الفوضى من الانتظام بسهولة أكثر، حيث يمكننا أن نرى استقرارية النقطة الثابتة P_5 من خلال هذه المخططات عندما

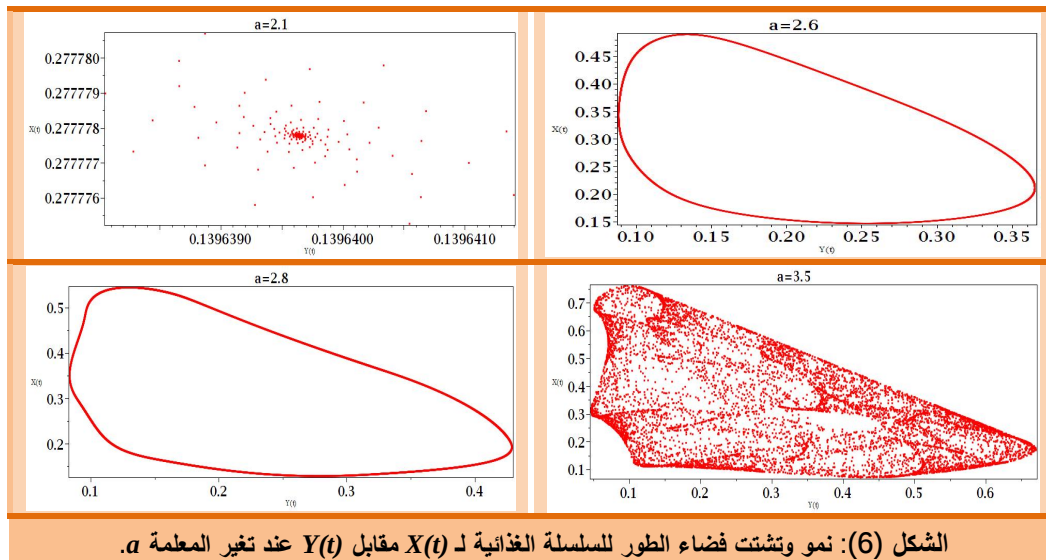
سوف نقوم بالاختبارات عليها، انظر إلى الشكل (4).
حيث يكون فضاء الطور لها منتظمة، والتي



كما يمكننا رؤية عدم الاستقرار عندما $r=3.8, d=3.5, c=3.6, b=3.7, a=3.55$
، بحيث يكون فضاء الطور لها فوضوي، كما في الشكل (5).

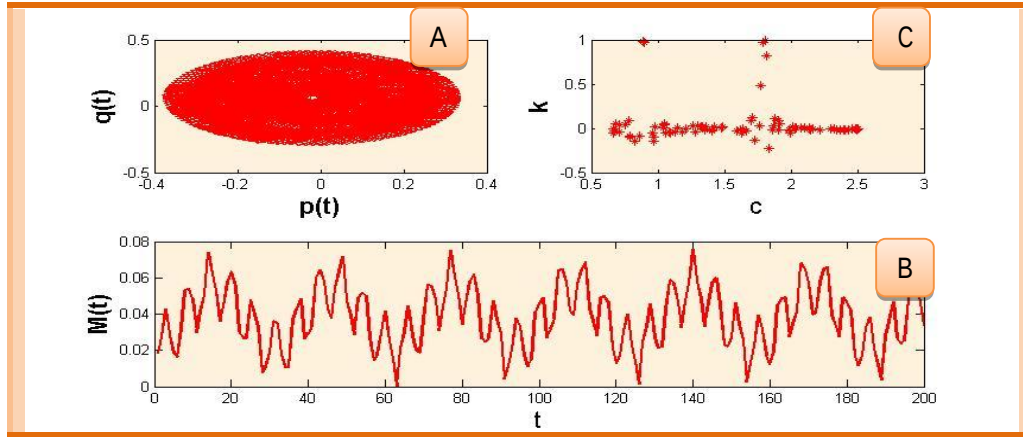


زيادة معلمة السيطرة ($a=3.1$) يؤدي إلى جعل النقطة الثابتة P5 غير مستقرة، وإنشاء
منحنى مغلق ثابت حول النقطة ثابتة، انظر الى الشكل (6).



8. اختبار فوضوية السلسلة الغذائية (Chaotic test of food chain)

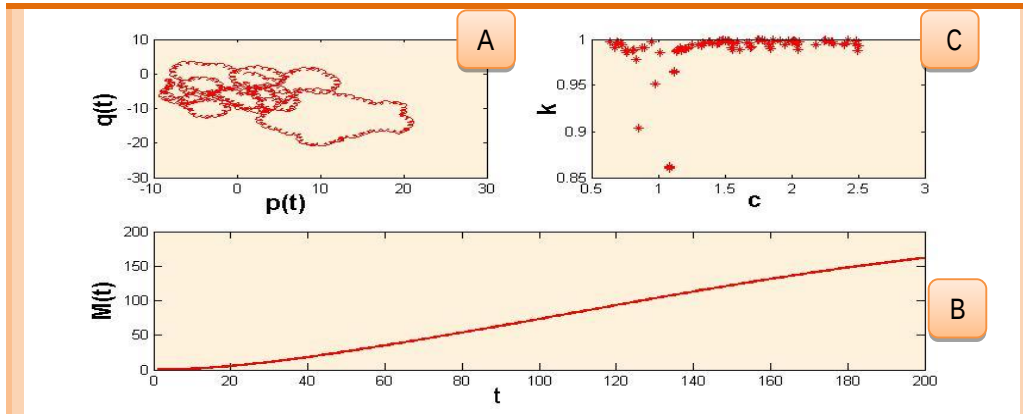
إن السلسلة الغذائية تتمتع ببنية تركيبية بالغة التعقيد والتي تجعل من الصعوبة تحليل تلك السلسلة وتحديد فيما إذا كان السلوك فوضوي أم غير فوضوي، تم إجراء اختبار الثنائي (0-1) للفوضى والذي يتميز بإمكانية تطبيقه على أي مشاهدات حركية بدون الحاجة إلى إعادة بناء فضاء الطور، وعند الاختبار تبين أن سلوك السلسلة الغذائية منتظمة $K = 0.002 \approx 0$ عندما $a=2.92$ ، $b=3.7$ ، $c=3.6$ ، $d=3.5$ ، $r=3.8$ ، مع الشروط الأولية $(X_0, Y_0, Z_0) = (0.3, 0.2, 0.1)$. كما في الشكل (7).



الشكل (7)

(A) مقابل $p_c(t)$ وهي مقيدة مع الزمن t لنظام السلسلة الغذائية.
(B) متوسط مربع الإزاحة $M(t)$ مقابل الزمن t ، حيث $M(t)$ هو دالة مقيدة مع الزمن t .
(C) نمو (K_C) المحاذي لمتوسط مربع الإزاحة مقابل C ، (K_C) يبقى حول الصفر لنظام السلسلة الغذائية.

كما إن السلوك للسلسلة الغذائية فوضوية عندما $a=3.55$ ، $b=3.7$ ، $c=3.6$ ، $d=3.5$ ، $r=3.8$ حيث $K = 0.998 \approx 1$. كما موضح في الشكل (8).



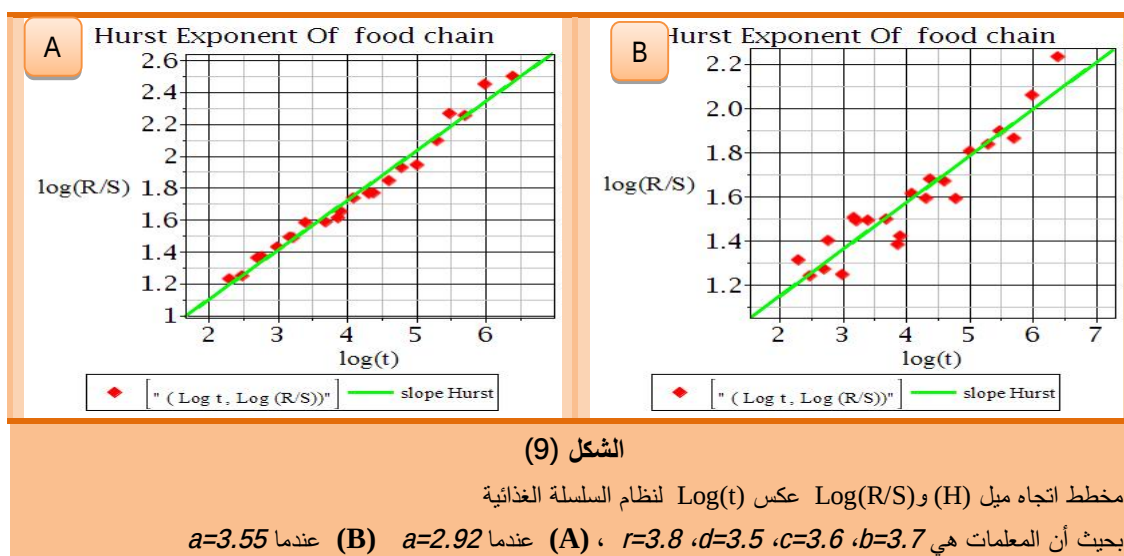
الشكل (8)

(A) مقابل $p_c(t)$ وهي تظهر سلوك مشابه للحركة البراونية لنظام السلسلة الغذائية.
(B) متوسط مربع الإزاحة $M(t)$ مقابل الزمن t ، حيث $M(t)$ هو دالة تنمو خطياً مع الزمن t .
(C) نمو (K_C) المحاذي لمتوسط مربع الإزاحة مقابل C ، (K_C) يبقى حول الواحد لنظام السلسلة الغذائية.

9. البعد الكسوري ومؤشر قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية

(The fractal dimension and predictability index of the food chain)

في هذا الجزء تم حساب البعد الكسوري ومؤشر قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية من خلال خوارزمية آسية هيرست المحدثه، وذلك بأخذ المتسلسلة الزمنية للسلسلة الغذائية المكونة من 1200 قيمة عددية لتحديد فيما إذا كانت المتسلسلة ثبات التواصل أم ضد ثبات التواصل. إذ انه باستخدام آسية هيرست المحدثه في حالة كون $d=3.5, c=3.6, b=3.7, a=2.92$ مع الشروط الأولية لها $(X_0, Y_0, Z_0) = (0.3, 0.2, 0.1)$ فالمتسلسلة في هذه الحالة تكون ضد ثبات التواصل لان آسية هيرست $(H_X, H_Y, H_Z) = (0.22, 0.217, 0.182)$ ، ومن خلال (2) تم الحصول على البعد الكسوري للمتسلسلة الزمنية (D) مع وجود حالة انتظام من خلال اختبار الفوضى (0-1). ففي هذه الحالة أظهرت قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية معتمدة على المتغيرات (X, Y, Z) ، بحيث أن $PI_F = (PI_X, PI_Y, PI_Z) = (0.58, 0.566, 0.636)$. أما في حالة كون $a=3.55, b=3.7, c=3.6, d=3.5, r=3.8$ ، فالمتسلسلة في هذه الحالة تكون ضد ثبات التواصل لان آسية هيرست $(H_X, H_Y, H_Z) = (0.31, 0.39, 0.28)$ ، ومن خلال العلاقة (2) تم الحصول على البعد الكسوري للمتسلسلة الزمنية (D) مع وجود حالة الفوضى من خلال اختبار (0-1) للفوضى. ففي هذه الحالة أظهرت ضعف قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية معتمدة على المتغيرات (X, Y, Z) ، والمأخوذة من العلاقة (3) $PI_F = (PI_X, PI_Y, PI_Z) = (0.38, 0.22, 0.44)$ انظر الى الشكل (9).



ولتوضيح النتائج بصورة كاملة انظر إلى الجدول (1).

الجدول (1) ملخص اختبارات السلسلة الغذائية						
معلمة التشعب	المتغيرات	آسية هيرست	البعد الكسوري	مؤشر التنبؤ PI_F	مخططات التشعب	فضاء الطور
الاختبار الثاني للفوضى						

$K \approx 0$	دورية (دورة النهاية)	منتظم	0.58	1.79	0.22	X	a=2.92
			0.566	1.783	0.217	Y	
			0.636	1.818	0.182	Z	
$K \approx 1$	فوضوية	فوضوي	0.38	1.69	0.31	X	a=3.55
			0.22	1.61	0.39	Y	
			0.44	1.72	0.28	Z	

(Conclusions)

الاستنتاجات

- 1- إن آسية هيرست بالطريقة المحدثه للسلسلة الغذائية هي ضد ثبات التواصل في أكثر حالاته.
- 2- مؤشرات قابلية التنبؤ للسلسلة الغذائية تزداد كلما ازدادت آسية هيرست بالقرب من الواحد أو الصفر وتقل كلما اقتربت من 0.5.
- 3- النظام (1) يحتوي على خمسة نقاط ثابتة P_1, P_2, P_3, P_4 هي نقطة التوازن الحدودية (boundary) وان P_5 هي نقطة التوازن الداخلي للنظام.
- 4- نظام السلسلة الغذائية هو نظام فوضوي للمعاملات الرئيسية a و c حسب اختبار (1-0) للفوضى، عند النقطة الثابتة P_5 التي تعتبر نقطة التوازن الداخلي، وللسيطرة على الفوضى يجب ان تكون المعلمة a ضمن الفترة [2.8,3]، والمعلمة c ضمن الفترة [3.55,3.65] حسب مخطط التشعب.
- 5- نقطة التوازن الداخلي P_5 تفقد استقرارها من خلال مخطط التشعب، ونمو في مستويات النموذج للزمن المنقطع من خلال المحاكاة العددية التي تم تحليل خصائصها الأساسية المتعلقة بفضاء الطور ومخططات التشعب واختبار (1-0).

(References)

المصادر

- [1] عزيز، ميسون مال الله & حامد، محمد أمير، (2013)، " تحديث خوارزمية آسية هيرست مع التطبيق على حالات المناخ بمدينة الموصل " ، بحث مقبول وقيد النشر في مجلة الرافدين لعلوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل.
- [2] Aziz, M.M. & Faraj, M.N., (2012), "Numerical and Chaotic Analysis of CHUA'S CIRCUIT", Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences, VOL. 3, NO. 5, ISSN 2079-8407.
- [3] Elaydi, S. N., (2008), "An Introduction to Difference Equations", Third Edition, Springer International Edition, First Indian Reprint.
- [4] Elsadan, A.A., (2012), "Dynamical complexities in a discrete-time food chain", Computational Ecology and Software, 2(2),124 – 139.

- [5] Granero, M.A. S. & Segovia, J.E.T. & Pérez, J.G., (2008), "Some comments on Hurst exponent and the long memory processes on capital markets", Elsevier, Physica A 387, 5543–5551.
- [6] Hastings, A. & Powell, T., (1991), "Chaos in three-species food chain", Ecology, Vol.72, No.3, 896-903.
- [7] Holling, C.S., (1965), "The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation", Memoirs of the Entomological Society of Canada, vol. 45, 1–60.
- [8] Hurst, H.E., (1951), "Long-term storage of reservoirs: an experimental study", Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 116, 770-799.
- [9] Lotka, A.J., (1925), "Elements of Physical Biology", Williams & Wilkins Co., Baltimore.
- [10] Malthus, T.R., (1798), "An Essay on the Principle of Population", Printed for J. Johnson, in St. Pauls Church-Yard, London.
- [11] Mandelbrot, B.B. & Wallis, J.R., (1969), "Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence", Water Resources Research, Vol. 5, Issue 5, 967–988.
- [12] Mittal, A. & Bhardwaj, R., (2011), "PREDICTABILITY INDEX FRACTAL DIMENSION AND HURST EXPONENT ESTIMATION OF INDIAN AIR POLLUTION PARAMETERS", International journal of Advanced Scientific and Technical Research, Issue 1, Vol. 2, ISSN 2249-9954.
- [13] Raj, M.R.S. & Selvam, A.G.M. & Janagaraj, R. & Pushparajan, D., (2013), "Dynamical Behavior in a Three Species Discrete Model of Prey-Predator Interactions", International Journal of Computational Science and Mathematics, ISSN 0974-3189 Vol. 5, N. 1, 11-20.
- [14] Rehman, S., (2009), "Study of Saudi Arabian climatic conditions using Hurst exponent and climatic predictability index", Elsevier, Chaos Solutions and Fractals 39, 499–509.
- [15] Volterra, V., (1962), "Opere matematiche:memorie e note", Vol. V. Roma (Cremon), Acc. Naz. dei Lincei, Italy.
- [16] Wiggins, S., (1990), "An Introduction to Applied Nonlinear Dynamics and Chaos", Springer-Verlag, New York, USA.