المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[48-61]

الحل العددي لمعادلة Burger _Fisher في بعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية

د.عبد الغفور محمد امين* كرم عادل عبد**

الملخص

في هذا البحث قمنا بحل معادلة Burger_Fisher ببعدين عددياً باستخدام ثلاثة انواع من طرائق الفروقات المنتهيةو هي الطريقة الصريحة والطريقة الأسية وطريقة DuFort_Frankel وبعد مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام تلك الطرائق مع الحل المضبوط للمعادلة وجد تقارباً بين الحل المضبوط والحلول العددية لتلك الطرائق.

Numerical Solution For Burger's _Fisher in Two - Dimensional Using Finite Difference Methods

ABSTRACT

In this paper we solved Burger's_Fisher equation numerically with two dimensions by using three finite differences methods which are the explicit method, exponential method and DuFort_Frankel method, after comparing numerical results which have been obtained by using those methods with the exact solution for the equation, there has been found an approximation between exact solution and Numerical solutions for those methods.

1 – المقدمة Introduction

من المعروف إن اغلب الظواهر المشهورة التي تظهر في الفيزياء الرياضية والحقول الهندسية يمكن أن توصف بالمعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء على سبيل المثال،

* أستاذ مساعد / قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

**باحث / قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/10/2 ــــــــــــــــــــ تأريخ القبول 2013/11/21

إذ إن تدفق الحرارة وظاهرة توليد الموجة هي موصوفة بصورة جيدة بالمعادلات التفاضلية الجزئية (Logan, 1994)، حيث أن أكثر النماذج الواقعية في الفيزياء والكيمياء الحياتية وعلم والأحياء وما شابه هي ذات طبيعة غير خطية مثل التشققات في البلورات وحركة محفزات الـ (DNA) (Quintero and Sanchez, 1998) ، وفي علم البيئة نماذج السكان توصف بالمعادلات التفاضلية الجزئية (Whithan, 1986).

قام الباحث (M.Javidi) سنة 2006 بإيجاد حلول الموجة الانفرادية لمعادلة (Burger_Fisher) المعممة حيث قدم طريقة جديدة لحل المعادلة المعممة باستخدام الطريقة الطيفية (Spectral method) لنقطة(Chebyshev_Gauss_Lobatto) لتقليل خطأ التقريب حيث استخدم (Precondtioning Method) وهي طريقة مشروطة جديدة تم تطبيقها على معادلة (Burger_Fisher)، كما استخدم الباحث طريقة (Runge_Kutta) للتكامل العددي لنظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية وقد قام الباحث بمقارنة النتائج العددية مع الحل المضبوط لإظهار كفاءة الطريقة (Javidi, 2006) .

لقد تناول الباحث المولى سنة 2005 حل معادلة (Fisher_ equation) عدديا وباستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية وهما على التوالي الطريقة الطريحة وطريقة (Crank_Nicholson) وقد تم عمل مقارنة بين الطريقتين إذ تبين أن طريقة (Crank_Nicholson) هي الأدق والأفضل من الطريقة الصريحة (Al-Mula, 2005) .

لقد استطاعت الباحثة الناصر سنة 2013 من حل معادلة (Kuramuto_Sivashinsky) بطرائق الفروقات المنتهية مستعملة أربعة طرائق وهي الطريقة الصريحة وطريقة (Crank_Nicholson) والطريقة الضمنية الكاملة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية وقد بينت الباحثة أنه عند استعمال الفترة $[0,32\pi]$ والشرط الابتدائي تكون نتائج الطريقة الضمنية هي أقرب للحل المضبوط وعند استعمال الفترة $[-30, 30]$ والشرط الابتدائي فتكون الطريقة الضمنية والطريقة الصريحة أقرب للحل (Al-Naser, 2013).

تمكن كلا من الباحثين (K. Pandey و Lajja Verma و Amit K. Verma) سنة 2013 من تطبيق طريقة (DuFort_Frankel) والتي هي صيغة من صيغ الفروقات المنتهية على معادلة Burger وبحل ثلاثة مسائل اختبارية. تحسب الحلول العددية باستخدام Mathematica

7.0 لعدة قيم مختلفة من اللزوجة. أصغر قيمة للزوجة اعتبرت هي 4-10 ، وقد لاحظ الباحثون أن الحلول العددية تقترب بشكل جيد الى الحل المضبوط (Pandey, Lajja and Amit, 2013) .

كما قمنا في هذا البحث بإعطاء مقدمة عامة عن المعادلات التفاضلية الجزئية ونبذة مختصرة عن الاعمال السابقة لمعادلة Burger_Fisher والأنموذج الرياضي مع الشرط الابتدائي والشروط الحدودية والحلول العددية لمعادلة Burger_Fisher مع اشتقاق الطريقة الصريحة والطريقة الأسية وطريقة Dufort_Frankel والنتائج العددية والاستنتاجات .

2- الأنموذج الرياضي :

أما صيغة معادلة Burger_Fisher في البعدين هي (Jianying and Guangwu, 2010):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u^{\delta}\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta u\left(1-u^{\delta}\right)\quad\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي لمعادلة Burger_Fisher ذات البعدين هو :

$$u(x,y,0)=h(x,y)\quad\cdots(2)$$

والشروط الحدودية لمعادلة Burger_Fisher ذات البعدين هي:

$$u(c,d,t)=h_0(t)\quad\cdots(3)$$

$$u(e,f,t)=h_1(t)\quad\cdots(4)$$

حيث c , d , e , f ثوابت

والحل المضبوط لها هو

$$u(x,y,t)=h_2(x,y,t)\quad\cdots(5)$$

3- الحل العددي لمعادلة Burger_ Fisher :

تعد طريقة الفروقات المنتهية (Finite Differences Method) إحدى أكثر الطرائق الكلاسيكية في التحليل العددي للمعادلات التفاضلية وتُعد إحدى أكثر التطبيقات أهمية، وتُشكل الفروقات المنتهية قاعدة التحليل العددي كما طبقت في طرائق عددية أخرى مثل التفاضل العددي والتكامل العددي (Grujic, 2000) و (Guo and Xiang, 1997).

3-1اشتقاق صيغة الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) لمعادلة (Burger_Fisher) :

سوف نبدأ بعملية اشتقاق الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) مباشرة وباستخدام المشتقات الجزئية بالنسبة لـــ (x) و (y) و (t) وتعويضها في المعـــــادلة (1) نحصـــل على :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{k} = \mu\left(\frac{u_{i-1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i+1,j}^{n}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{1,j+1}^{n}}{p^2}\right) + \beta u_{i,j}^{n}\left(1 - \left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right) - \alpha\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2h} + \frac{u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j+1}^{n}}{2p}\right) \qquad \cdots(6)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \frac{\mu k}{h^2}\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right) + \frac{\mu k}{p^2}\left(u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right) + +\beta k(u_{i,j}^{n})\left(1 - \left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right) - \left(\frac{\alpha k}{2h}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{\alpha k}{2p}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}\right)\right) \qquad \cdots(7)$$

i = 1,2,3,4,…

j = 1,2,3,4,…

ليكن $r_1 = k / h^2$ و $r_2 = k / p^2$

حيث $h , p \neq 0$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \mu r_1\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right) + \mu r_2\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right) + \beta k(u_{i,j}^{n})\left(1 - \left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right) - \left(\frac{\alpha h r_1}{2}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{\alpha p r_2}{2}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}\right)\right) \qquad \cdots(8)$$

حيث أن المعادلة (8) تمثل صيغة الطريقة الصريحة لحل معادلة (Burger_Fisher) في البعدين.

2-3 اشتقاق صيغة طريقة الفروقات المنتهية الأُسية (Exponential Scheme) لمعادلة (Burger_Fisher) :

ســـــوف نبدأ أيضاً بعملية اشتقـــاق صيغة طـريقة الفروقات المنتهية الأسية (Exponential Scheme) مباشرة وباستخدام المشتقات الجزئية بالنسبة لـــ (x) و (y) و (t) وتعويضها في المعـــــادلة (1) نحصـــل على (*Bahadir, 2005*):

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = F'(u)\left(\mu\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+\beta u\left(1-u^{\delta}\right)-\alpha u^{\delta}\left(u_x+u_y\right)\right) \quad \cdots(9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'(u)(\mu(u_{xx}+u_{yy})+\beta u(1-u^{\delta})-\alpha u^{\delta}(u_x+u_y)) \quad \cdots(10)$$

وباستخدام الفروقات التقدمية الاعتيادية وتعويضها عن $\frac{\partial F}{\partial t}$ نحصل على

$$F\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{k}\right) = F'(u)\left(\mu\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+\beta u\left(1-u^{\delta}\right)-\alpha u^{\delta}\left(u_x+u_y\right)\right) \quad \cdots(11)$$

وبفرض أن $F(u) = ln\, u$

$$ln\left(u_{i,j}^{n+1}\right) = ln\left(u_{i,j}^{n}\right)+\frac{k}{u_{i,j}^{n}}\left(\mu\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n}\right)+\beta\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}-\alpha\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j}^{n}\right)\right)\right) \quad \cdots(12)$$

وباستخدام الفروقات المركزية للمشتقات u_x , u_{xx} , u_y , u_{yy} وتعويضها في المعادلة (3.10) نحصل على :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n}\,.\,exp\left(\frac{k}{u_{i,j}^{n}}\left(\mu\left(\frac{u_{i-1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i+1,j}^{n}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{1,j+1}^{n}}{p^2}\right)\right)+\beta\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right)-\alpha\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2h}+\frac{u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j+1}^{n}}{2p}\right)\right) \quad \cdots(13)$$

ليكن $r_1 = k / h^2$ و $r_2 = k / p^2$

حيث $h , p \neq 0$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n}\,.\,exp\left(\frac{1}{u_{i,j}^{n}}\left(\mu r_1\left(u_{i-1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i+1,j}^{n}\right)+\mu r_2\left(u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{1,j+1}^{n}\right)+\beta k\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right)-\alpha\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(\frac{hr_1}{2}\left(u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}\right)+\frac{pr_2}{2}\left(u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j+1}^{n}\right)\right)\right)\right) \quad \cdots(14)$$

i = 1,2,3,4,…

j = 1,2,3,4,…

حيث أن المعادلة (14) تمثل صيغة طريقة الفروقات المنتهية الأسية لحل معادلة (Burger_Fisher) في البعدين .

3-3 اشتقاق صيغة طريقة (DuFort_Frankel) لمعادلة (Burger_Fisher):

ســـــوف نبدأ بعملية اشتقاق صيغة طريقة الـ (DuFort_Frankel) مباشرة وباستخدام المشتقات الجزئية بالنسبة لـــ (x) و (y) و (t) وتعويضها في المعـــــــادلة (1) نحصـــل على (Zlatko, 1996):

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}}{2k}=\mu\left(\frac{u_{i-1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i+1,j}^{n}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}}{p^2}\right)+\beta\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-u_{i,j}^{n}\right)^{\delta})-\alpha\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2h}+\frac{u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j+1}^{n}}{2p}\right)\quad\cdots(15)$$

وبضرب الطرفين في (2k) وتحويل $u_{i,j}^{n-1}$ الى الطرف الأيمن نحصل على

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n-1}+\frac{2k\mu}{h^2}\left(u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n}\right)+\frac{2k\mu}{p^2}\left(u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n}\right)+2k\beta\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right)-\left(\frac{\alpha k}{h}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}\right)+\frac{\alpha k}{p}\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}\right)\quad\cdots(16)$$

ليكن $r_1=k/h^2$, $r_2=k/p^2$

حيث $h, p\neq 0$

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n-1}+2r_1\mu(\left(u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i+1,j}^{n}\right)+2r_2\mu\left(u_{i,j-1}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j+1}^{n}\right)+2k\beta\left(u_{i,j}^{n}\right)\left(1-\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\right)-(\alpha h r_1\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}\right)+(\alpha p r_2\left(u_{i,j}^{n}\right)^{\delta}\left(u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}\right))\quad\cdots(17)$$

حيث أن المعادلة (17) تمثل صيغة طريقة الـ (DuFort_Frankel) لحل معادلة (Burger_Fisher) في البعدين .

4- النتائج العددية Numerical Results

تعـــد معادلة Burger_Fisher من المعادلات غير الخطية ، وبأخذ مثال تطبيقي على معادلة Burger_Fisher ذات البعدين والمتمثلة بالمعادلة (1) والشـــرط الابتدائـــي بالمعـادلة (2) والشروط الحدودية بالمعادلتين (4,3) ,(Jianying and Guangwu, 2010) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u^{\delta}\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta u\left(1-u^{\delta}\right)\quad\cdots(18)$$

في الفترة $t\geq 0$, $-0.5\leq x\ \leq 0.5$

والشرط الابتدائي

$$u(x,y,0)=(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tanh(-\tfrac{2\alpha\delta(x+y)}{4\mu(\delta+1)}))^{1/\delta}\qquad\cdots(19)$$

والشروط الحدودية

$$u(-0.5,-0.5,t)=$$
$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tanh(\tfrac{-2\alpha\delta}{4\mu(\delta+1)}(x+y-\tfrac{4\alpha^2+2\mu\beta(\delta+1)^2}{2\alpha(\delta+1)}t)))^{1/\delta}\qquad\cdots(20)$$

$$u(0.5,0.5,t)=$$
$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}tanh(\tfrac{-2\alpha\delta}{4\mu(\delta+1)}(x+y-\tfrac{4\alpha^2+2\mu\beta(\delta+1)^2}{2\alpha(\delta+1)}t)))^{1/\delta}\qquad\cdots(21)$$

والحل المضبوط

$$u(x,y,t)=$$
$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tanh(\tfrac{-2\alpha\delta}{4\mu(\delta+1)}(x+y-\tfrac{4\alpha^2+2\mu\beta(\delta+1)^2}{2\alpha(\delta+1)}t)))^{1/\delta}\qquad\cdots(22)$$

(i,j,k)	Explicit	Exponential	DuFort_Frankel
(6,1,3)	0	0	0
(6,2,3)	8.191219888709078e-006	3.547525670999363e-006	5.633604708665807e-005

(6,3,3)	7.518662162497858e-005	3.247774107451029e-005	5.147232618226694e-004
(6,4,3)	6.574571200523849e-004	2.793984898649127e-004	4.348687201042645e-003
(6,5,3)	4.101136443329656e-003	1.578493818149118e-003	2.135742636318472e-002
(6,6,3)	9.823155810989359e-003	2.154509288800122e-003	9.696968065313727e-003
(6,7,3)	7.727400583959820e-003	4.968718791119597e-004	2.972586898666757e-002
(6,8,3)	3.289315453622571e-003	1.471829926499579e-004	1.871723230478871e-002
(6,9,3)	1.127948367336186e-003	3.629963922921475e-005	6.719851095929923e-003
(6,10,3)	3.729673219963828e-004	9.622744383798454e-006	2.233730844975298e-003
(6,11,3)	0	0	0

الجدول (1)

يوضح قيمة الخطأ لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط للمدة $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن $t = 0.2$

وعندما $\mu = 0.003 , \beta = 0.01 , \alpha = 0.1 , \delta = 2$

(i,j,k)	Explicit	Exponential	DuFort_Frankel
(6,1,4)	0	0	0
(6,2,4)	1.347905778859015e-005	6.801986712656749e-006	1.088074747386258e-004
(6,3,4)	1.239564305370866e-004	6.238428635918503e-005	9.494802540847003e-004
(6,4,4)	1.096774827275882e-003	5.407908504968528e-004	6.180931674828583e-003

(6,5,4)	7.258014964466431e-003	3.106485343528753e-003	1.897959551761519e-002
(6,6,4)	1.986262162950514e-002	4.331708314349481e-003	1.712952987016569e-003
(6,7,4)	1.605044918566645e-002	1.012775722648462e-003	3.764319248023573e-002
(6,8,4)	6.668262747178702e-003	2.975965948721487e-004	2.644110695716098e-002
(6,9,4)	2.276738314001783e-003	7.348236355145948e-005	1.040763832804659e-002
(6,10,4)	7.522488778754343e-004	1.944168294727364e-005	3.473387159995985e-003
(6,11,4)	0	0	0

الجدول (2)

يوضح قيمة الخطأ لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن t= 0.3

وعندما $\mu = 0.003$, $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\delta = 2$

(i,j,k)	Explicit	Exponential	DuFort_Frankel
(6,1,3)	0	0	0
(6,2,3)	1.870055545001859e-003	6.161323664070073e-004	2.891462149722357e-003
(6,3,3)	3.332521072968775e-003	1.060428955516057e-003	4.214045919580745e-003
(6,4,3)	5.513434802718376e-003	1.656465801897045e-003	4.574418287896176e-003
(6,5,3)	8.171851385710749e-003	2.229072442154645e-003	1.895299851588206e-003
(6,6,3)	1.046722167164527e-002	2.461373034869929e-003	4.883564951789765e-003

(6,7,3)	1.141304452129410e-002	2.187754127333519e-003	1.313577982540115e-002
(6,8,3)	1.075815413653197e-002	1.601430574908302e-003	1.845083327540953e-002
(6,9,3)	9.086450254089495e-003	1.013928592976721e-003	1.920414430269307e-002
(6,10,3)	7.125714101400726e-003	5.835594770962072e-004	1.687616141162773e-002
(6,11,3)	0	0	0

الجدول (3)

يوضح قيمة الخطأ لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن $t = 0.2$

وعندما $\mu = 0.01\ ,\ \beta = 0.01\ ,\ \alpha = 0.1\ ,\ \delta = 2$

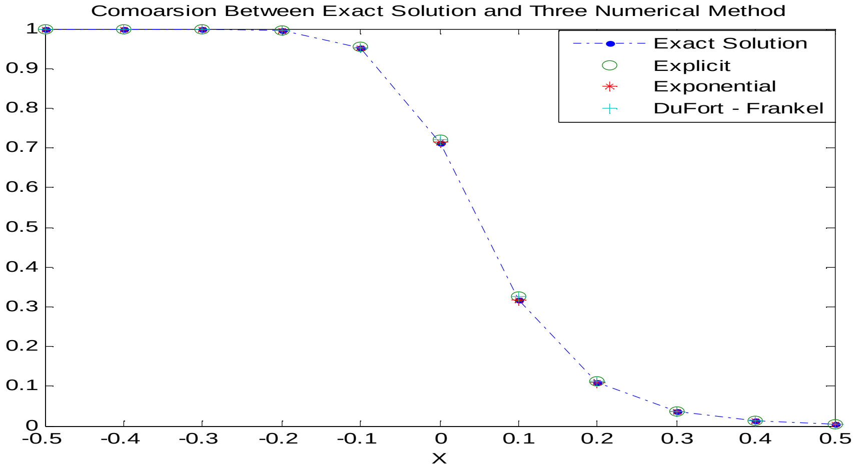
(i,j,k)	Explicit	Exponential	DuFort_Frankel
(6,1,4)	0	0	0
(6,2,4)	3.625027296543681e-003	1.211493479456260e-003	3.514698421130280e-003
(6,3,4)	6.497931621099351e-003	2.097238285463932e-003	4.559072713534951e-003
(6,4,4)	1.080549547065179e-002	3.285011830014284e-003	2.960571883326546e-003
(6,5,4)	1.612921278509982e-002	4.437350199629986e-003	3.796853203233863e-003
(6,6,4)	2.082745240641715e-002	4.920705290586303e-003	1.622513548709681e-002
(6,7,4)	2.287791180313636e-002	4.390086011732741e-003	3.007710451046042e-002
(6,8,4)	2.168304631713725e-002	3.221765142946365e-003	3.898831637911687e-002

(6,9,4)	1.837620397661416e-002	2.042663284647694e-003	4.015648362814372e-002
(6,10,4)	1.440446405302764e-002	1.173263193633867e-003	3.276085497139403e-002
(6,11,4)	0	0	0

الجدول (4)

يوضح قيمة الخطأ لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط $(-0.5\,,0.5)$ عند الزمن $t = 0.3$

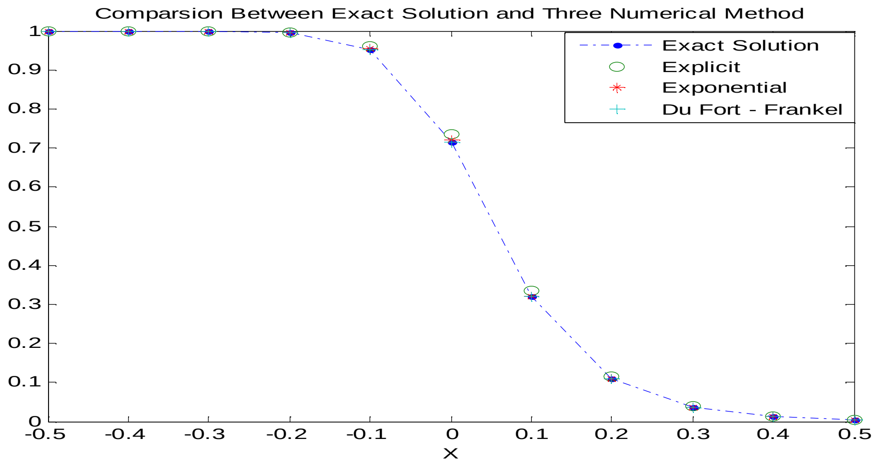
وعندما $\mu = 0.01\,,\ \beta = 0.01\,,\ \alpha = 0.1\,,\ \delta = 2$



الشكل (1)

يوضح موازنة الحلول العددية لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط في الفترة $(-0.5\,,0.5)$ عند الزمن $t = 0.2$ وعندما

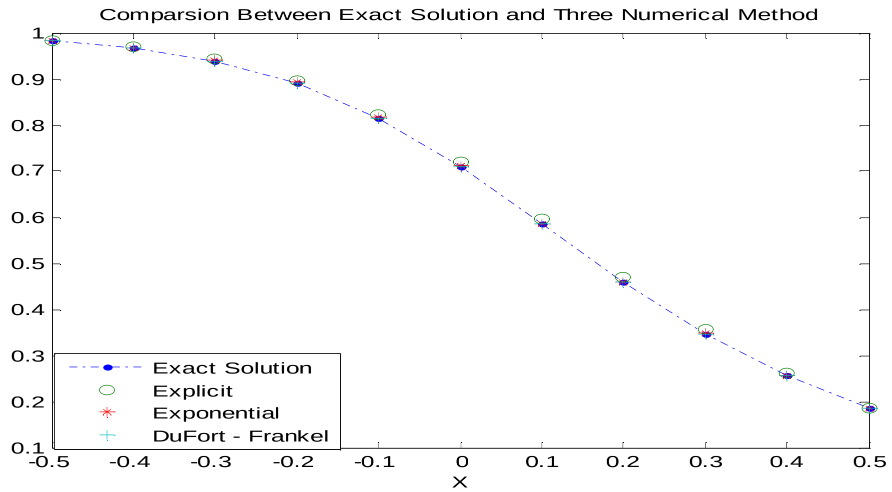
$\mu = 0.003\,,\beta = 0.01\,,\alpha = 0.1\,,\delta = 2$



الشكل (2)

يوضح موازنة الحلول العددية لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط في الفترة $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن $t = 0.3$

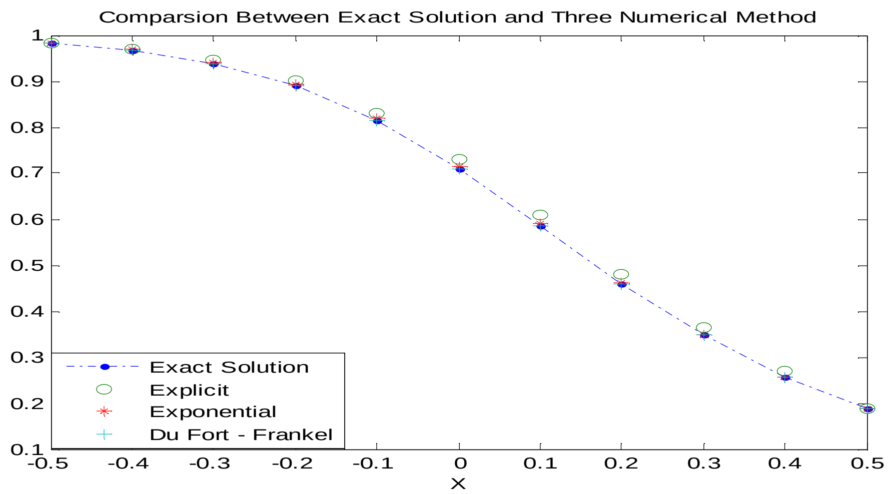
وعندما $\mu = 0.003, \beta = 0.01, \alpha = 0.1, \delta = 2$



الشكل (3)

يوضح موازنة الحلول العددية لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط في الفترة $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن $t = 0.2$

وعندما $\mu = 0.01, \beta = 0.01, \alpha = 0.1, \delta = 2$



الشكل (4)

يوضح موازنة الحلول العددية لمعادلة B_F في البعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الثلاثة مع الحل المضبوط في الفترة $(-0.5, 0.5)$ عند الزمن $t = 0.3$ وعندما $\mu = 0.01, \beta = 0.01, \alpha = 0.1, \delta = 2$

5-الاستنتاجات

من خلال دراستنا لمعادلة Burger_Fisher لاحظنا أنها من المعادلات الحرارية المهمة في التطبيقات الهندسية والفيزيائية وقد استخدمها العلماء بكثرة في الآونة الاخيرة ، وقد توصلنا إلى أهم الاستنتاجات والتي هي :

1-عندما $\mu = 0.003, \beta = 0.01, \alpha = 0.1, \delta = 2$ عند الزمن $t = 0.2, 0.3$ لاحظنا أن الطريقة الأسية تكون أقرب إلى الحل المضبوط .

2-عندما $\mu = 0.01,\ \beta = 0.01,\ \alpha = 0.1,\ \delta = 2$ عند الزمن $t = 0.2, 0.3$ لاحظنا أن الطريقة الأسية تكون أقرب إلى الحل المضبوط أيضاً.

المصادر

[1] Al-Mula, Ahmed F.K., (2005), **“Stability analysis and numerical solution to Fisher Equation”**, thesis master, University Mosul.

[2] Al-Naser, Shrooq, M.A., (2013), **“Stability Analysis and the numerical solution for kuramoto-sivashinsky equation”**, thesis master, University Mosul.

[3] Bahadir, A. Refik, (2005), ‘‘Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times”, Applied Mathematics and Computation, Vol.160, pp.675-682.

[4] Grujic, Z., (2000), “Spatial Analyticity on the Global Attractor for the Kuramoto-Sivashinsky Equation”, J. of Dynamics and Differential Equations, Vol.12, No.1, PP.217-228.

[5] Guo B. and Xiang M.X., (1997), “The Large Time Convergence of Spectral Method for Generalized kuramoto-Sivashinsky Equations”, J. of Computational Mathematics, Vol.15, No.1, PP.1-13.

[6] Jianying Zhang and Guangwu Yan, (2010), “A Lattice Boltzmann Model For the Burger’s_Fisher Equation”, College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, People’s Republic of China.

[7] K. Pandey, Lajja Verma and Amit K. Verma, (2013), “Du Fort–Frankel finite difference scheme for Burgers equation” Vol.2, pp. 91-101**,** DOI:10.1007/s40065-012-0050-1**,** published with open access at Springer link.

[8] Logan, J.D., (1994), **“An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations”**, John Wiley, New York.

[9] M. Javidi, (2006), “Modified Pseudospectral Method For Generalized Burger’s_Fisher Equation”, International Mathematical Forum ,Vol. 1, No. 32 , pp 1555-1564.

[10] Quintero, N.R. and Sanchez, A., (1998), **“Dc Motion of ac Driven Sine–Gordon Solitons”**, Phys. Lett. A247, pp.161–166.

[11] Whithan, G.B., (1986), **“Linear and Nonlinear Waves”**, John Wiley, New York.

[12] Zlatko Petrovic , Ph. D. And Slobodan Stupar , Ph.D., (1996), **“Computational Fluid Dynamics”**, part 1**,** Mechanical Engineering Faculty Belgrade, Publishers.