

الحل العددي لمسألة كهرومغناطيسية (MHD) في إحداثيات كارتيزية

احمد سالار جلال

د.احمد محمد جمعة

الملخص

في هذا البحث قمنا بدراسة جريان مائع في مقطع العرضي تحت تأثير مجال كهرومغناطيسي ، قمنا ببناء نموذج رياضي ممثلا بنظام من معادلات التفاضلية الجزئية غير خطية ذات بعدين وقمنا بحل هذا النظام باستخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) ،وهي إحدى طرائق الفروقات المنتهية (Finite Differences) وبعد ان حصلنا على الحل العددي قمنا بتوضيح سلوك توزيع درجات الحرارة داخل المقطع العرضي، قمنا بدراسة تأثير كل من عدد راييلي و عدد براندل و كذلك تأثير عدد ايكرت على سلوك توزيع درجات الحرارة وكل هذا تم من خلال معادلة الطاقة ، وتم الوصول إلى حالة غير معتمدة على الزمن (Steady State) من حالة معتمدة على الزمن (Unsteady State) ، كما تم إيجاد سلوك جريان المائع داخل مقطع العرضي وقمنا بدراسة تأثير عدد هارتمان على سلوك جريان المائع في مقطع العرضي وكل هذا تم من خلال معادلة الحركة .

Numerical Solution of Electromagnetic Problem(MHD) in Cartesian Coordinate

Abstract

In this research we studied flow of fluid in an cross section under the effect of electromagnetic field , we build a mathematical model which is represented by system of two dimensional non-linear partial differential equations and we solve that system by using alternating directions implicit method (ADI) which is one of the finite differences methods after we get the numerical solution and we explain the behavior of temperature distribution inside the cross section, we studied the influence of Rayleigh number and the Prandtl number and also the influence of Eckert number upon the behavior of temperature distribution and all this done through the energy equation,

* أستاذ مساعد / قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

**باحث / قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/9/16 تاريخ القبول 2013/11/21

we arrived to steady state from unsteady state, we found the behavior of fluid flow inside the cross section and we studied the influence of Hartmann number upon the behavior of fluid flow in cross section and all this done through the motion equation.

1- المقدمة :

يعد موضوع حركة الموائع الممغنطة (MHD) (Magneto Hydrodynamics) احد فروع المهمة لميكانيك الموائع و الذي يهتم بدراسة التفاعل الذي يجري بين سوائِل وحقول كهرومغناطيسية عندما يتحرك السائل خلال مجال الحقل الكهربائي المغناطيسيو تبعا التيار يتفاعل بالحقل المغناطيسي لإنتاج قوة الجسم على السائل مثل هذه التفاعلات تحدث في الطبيعة وفي مجالات الصناعية . وكذلك MHD تحدث في الشمس وداخل الأرض وطبقات Ionosphere العليا والفضاء الخارجي [3]. درس Magneto Hydrodynamics منذ القرن التاسع عشر ، لكن الدراسات الموسعة في هذا الحقل تمت في بداية القرن العشرين حيث إن أول النظريات و دراسات مختبريه لجريان (MHD) في الأنابيب و القنوات نفذتا في الثلاثينيات . نشر Williams نتائج التجارب لتدفق المنحلات بالكهرباء في الأنابيب معزولة . وكذلك وضع أنابيب بين أقطاب مغناطيس ، و الاختلاف المحتمل خلال التدفق تم قياسها بواسطة استعمال أسلاك مرت من خلال العوازل . Hartmann و Lazarus وسعوا بعض الدراسات النظرية ومختبريه في هذا الموضوع . حيث قاموا بتجربة استخدام الزئبق الذي له توصيل كهربائي 100,000 مرة أكثر من منحل بالكهرباء [8] . في عام 1937 Hartmann و Lazarus درسا تأثير العرضي لحقل مغناطيسي منتظم على جريان مائع لزج غير مضغوط موصل كهربائيا بين متوازيين ثابتين غير منتهيتين و كذلك بين صفيحتين عازلتين [4] . في عام 1956 حل Shercliff مشكلة القناة المستطيلة التي لاحظ من عدد Hartmann العالي الممثل بـ M إن توزيع السرعة في صميم (باطن) القناة يكون منتظمة مع وجود طبقة ساكنة تقريبا قرب الجدارين ، هذه النتيجة جعلته يحل مسألة قناة المستديرة في حاله تقريبية (تخمينية) (التقريب أولي أدى إلى أخطاء من رتبة M^{-1}) لـ M كبيرة مع فرض أن جدارين عازلين ، ثم لاحقا فرض الجدارين لهما توصيل صغير ، في عام 1968 حصل Gardner و Lykoudis مختبريا على بعض النتائج المتعلقة بقناة المستديرة مع انتقال الحرارة و بدون انتقال الحرارة ، Gold حل عدديا مسألة MHD في أنبوب مستدير ذو جدارين عازلين ، Lal و Singh قاما عدديا بحساب توزيع درجة الحرارة لجريان ال MHD الثابت المحوري (steady MHD axial flow) خلال قناة مستطيلة بالتوقف في درجة حرارة الجدار ، Nataraja و Naidu حصلوا على الحل عددي للمعادلات التي تتحكم بالجريان مع خصائص المائع المتغيرة منها ، توصيل

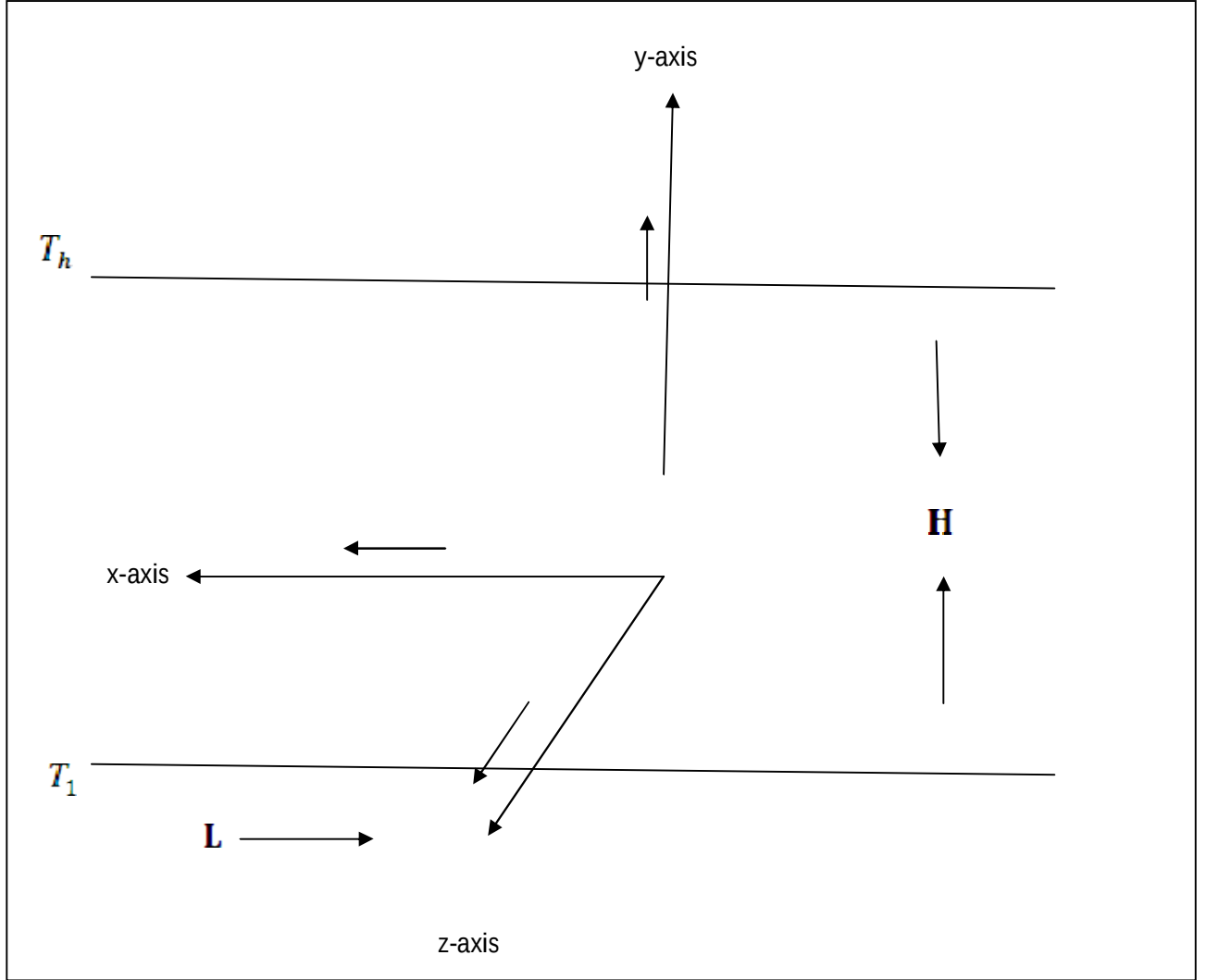
الكهربيائي ، لزوجة ، انضغاطية غاز وبوجود حقل مغناطيسي منتظم ، وقاما بتحليل توزيع السرعة و توزيع درجة الحرارة لجريان اقل من سرعة الصوت و لجريان أسرع من الصوت في قناة المولدة ل [8] Luciano. MHD حقق في انتقال الطبقي الحر حول اسطوانة أفقية [7] Goldstein و Kuehn. وجدا الحل عددي لمعادلات Navier-Stokes لجريان طباقى طبيعى بواسطة الحمل الحراري في اسطوانة مستديرة (دائرية) متساوي الحرارة أفقية [6] Cess و Sparrow. بحثا في تأثير حقل مغناطيسي على جريان بواسطة حمل الحراري الحر [10] Wilks . درس انتقال MHD الحر لصحيفة عمودية شبه منتهية لمقطع جريان في مجال ذو شدة قوية [12] Tani. درس تأثير تجويف على حركة الثابتة (غير معتمده على الزمن) للتوصيل الكهربيائي و للزوجة الموائع في القنوات [11] Attia. و Kotb درسا جريان ثابت المطور ل MHD و انتقال الحرارة بين صفيحتين متوازيين مع درجة حرارة معتمدة على اللزوجة [2] Chen . درس مسألة مشتركة هي انتقال الحرارة و انتقال الكتلة لمائع موصل كهربائيا لجريان MHD الطبيعي [1]. الحلول العددية لمعادلات جريان MHD المعتمد على الزمن ذات بعدين قدمت من قبل Lal و Singh و قدم نفس العمل ثلاثي ابعاد من قبل Salah و استخدم طريقة العناصر المنتهية (Finite Element) (لحل معادلات جريان MHD الغير ثابت (المعتمد على زمن) ثلاثي ابعاد). Dulikravich و Seungsoo. اقترحا صيغة طريقة الفروقات المنتهية (Finite Difference) لجريان MHD الغير ثابت ثلاثي ابعاد مع حقل درجة الحرارة واستخدما طريقة رانج-كوتا الصريحة للحسابات خطوه بخطوه مع الزمن. Lin و Sheu قدما نموذج حل لمسألة حمل حراري-انتشار-تفاعل لحل جريان MHD الغير ثابت (معتمد على الزمن) وطبق طريقة ADI في الحالة اللازمية والتي هي إحدى طائق الفروقات المنتهية على شبكة غير متمايلة [9] .

2-النموذج الرياضي:

نقوم بدراسة جريان مائع موصل للكهربائية داخل مقطع أفقي بعد تسليط مجال كهرومغناطيسي ثابت على المائع . فيتحول المائع إلى مائع ممغنط ، حيث نفرض إن درجة الحرارة عند الجدارين الأفقيين تكون ثابتة ، بحيث T_1 تمثل درجة الحرارة عند الجدار الأفقي السفلي و T_h تمثل درجة الحرارة عند الجدار الأفقي العلوي وتكون $T_h > T_1$. و H تمثل المسافة بين الجدارين الأفقيين السفلي والعلوي و L تمثل طول مقطع العرضي . وان المقطع يكون أفقي وهذا يعني انه لا توجد لدينا زاوية أي إن $\theta = 0$ ، عندما نسلط مجال كهرومغناطيسي عمودي على الأنبوب يطبق قاعدة الكف

الحل العددي لمسألة كهرومغناطيسية (MHD) في إحداثيات كارتيزية

الأيمن عليه وكما يأتي : المجال الكهرومغناطيسي العمودي المسلط يمثل المحور Y وبعد التسليط المجال الكهرومغناطيسي يتكون مائع ممغنط يجري باتجاه محور X وكذلك يتكون مجال كهرومغناطيسي مضاد باتجاه محور Z حيث يكون مقداره صغير جدا يمكن إهماله . كما موضح في الشكل (1) :



الشكل رقم (1) يمثل شكل توضيحي للمسألة

والمعادلات المتحكممة بالمسألة بالصيغة البعدية هي :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{\partial p}{\rho \partial x^*} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\sigma E_o B_o}{\rho} + \frac{\sigma E_o B_o u^*}{\rho} \\ - \frac{\sigma B_x B_o v^*}{\rho} \dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{\partial p}{\rho \partial y^*} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] - g\beta(T - T_o) - \frac{E_o \sigma B_x}{\rho} \\ - \frac{B_x \sigma B_o u^*}{\rho} + \frac{B_x^2 \sigma v^*}{\rho} \dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T}{\partial y^*} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^{*2}} \right] + 2 \in \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] \dots\dots (4)$$

نقوم بدمج المعادلتين (2) و (3) باستخدام عمليات رياضية وعليه تصبح معادلة الحركة كما يأتي :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial}{\partial y^*} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right] = \\ \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - g\beta \frac{\partial T}{\partial x^*} + \frac{B_x \sigma B_o}{\rho} \left[-\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] + \\ \frac{\sigma B_x^2}{\rho} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{E_o \sigma B_o}{\rho} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \dots\dots (5) \end{aligned}$$

حيث أن u^* و v^* هي مركبات سرعة ، t^* هي الزمن و ρ ، g ، P ، T ، T_o ، μ ، β على التوالي هي

كثافة ، الضغط ، التعجيل ، درجة الحرارة المطلقة ، درجة الحرارة الابتدائية ، اللزوجة ، معامل التمدد الحراري و $B = (B_x, B_y, B_z) = (B_x, B_o, 0)$ ، $E = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_o)$ ، $\epsilon = \frac{\mu}{\rho c_p}$ ، σ على التوالي هي متجه حقل

الحل العددي لمسألة كهرومغناطيسية (MHD) في إحداثيات كارتيزية

المغناطيسي ، متجه حقل الكهربائي ، معامل توصيل الحراري ، حرارة النوعية ، معلمة التشتت ، اللزوجة الكينماتية . مع شروط الحدودية التالية :

أ- الشروط الحدودية للحرارة :

الشروط الحدودية للحرارة عند الجدارين العلوي والسفلي كما يأتي :

حيث أن المائع يتحرك باتجاه محور X .

$$T(x^*, y^* = 0) = T_1$$

$$T(x^*, y^* = H) = T_h$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^*} = 0 , \quad x^* = [0, L]$$

ب- الشروط الحدودية للسرعة عند الجدارين:

$$u^*(x^* = 0, y^*) = v^*(x^* = 0, y^*) = 0$$

$$u^*(x^*, y^* = 0) = v^*(x^*, y^* = 0) = 0$$

$$u^*(x^* = L, y^*) = v^*(x^* = L, y^*) = 0$$

$$u^*(x^*, y^* = H) = v^*(x^*, y^* = H) = 0$$

3-الصيغة اللابعدية للمعادلات المتحكممة:

لحل المعادلات المتحكممة مع الشروط الحدودية نحتاج لتحويل المعادلات المتحكممة إلى

الصيغ اللابعدية في إحداثيات القطبية [13] .

$$u = \frac{u^*}{U} \Rightarrow \partial u^* = U \partial u$$

$$v = \frac{v^*}{U} \Rightarrow \partial v^* = U \partial v$$

$$U = \frac{\alpha}{L} \sqrt{Ra Pr} = \sqrt{g \beta \Delta T L} x = \frac{x^*}{L} \Rightarrow \partial x^* = L \partial x$$

$$y = \frac{y^*}{L} \Rightarrow \partial y^* = L \partial y$$

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_h - T_o} \Rightarrow \partial T = \partial \theta \Delta T$$

$$t = \frac{U t^*}{L} \Rightarrow \partial t^* = \frac{L}{U} \partial t$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_h - T_o) L^3}{\mu \alpha}$$

$$Pr = \frac{U}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$Ec = \frac{U^2}{c_p \Delta T}$$

$$Ha = B_o L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

إذ أن :

Ra هو عدد راييلي

Pr هو عدد براندل

Ec هو عدد ايكرت [5]

Ha هو عدد هارتمان

نعوض المقادير اللاحقة أعلاه في المعادلات (1)، (4)، (5) نحصل على :

$$\frac{U \partial u}{L \partial x} + \frac{U \partial v}{L \partial y} = 0 \quad \dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U \partial v}{L \partial x} - \frac{U \partial u}{L \partial y} \right) + \left[\frac{\partial}{L \partial x} \left(U u \frac{U \partial v}{L \partial x} + U v \frac{U \partial v}{L \partial y} \right) - \frac{\partial}{L \partial y} \left(U u \frac{U \partial u}{L \partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. U v \frac{U \partial u}{L \partial y} \right) \right] = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{L^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{L^2 \partial y^2} \right) \left(\frac{U \partial v}{L \partial x} - \frac{U \partial u}{L \partial y} \right) - \\ g \beta \left(\frac{\partial \theta \Delta T}{L \partial x} \right) + \frac{B_x \sigma B_o}{\rho} \left[- \frac{U \partial u}{L \partial x} + \frac{U \partial v}{L \partial y} \right] + \frac{\sigma B_x^2}{\rho} \frac{U \partial v}{L \partial x} - \frac{E_o \sigma B_o}{\rho} \frac{U \partial u}{L \partial y} \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta T}{L} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \frac{\Delta T}{L} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} \frac{\Delta T}{L} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] + 2 \in \left[\left(\frac{U \partial u}{L \partial x} \right)^2 + \left(\frac{U \partial v}{L \partial y} \right)^2 \right] \dots (8)$$

بعد تبسيط المعادلات اعلاه نحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \\ & \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial v}{\partial x} - I Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial u}{\partial y} \dots (10) \end{aligned}$$

حيث أن : $\frac{E_0}{B_0} =$ اهو معامل الحث .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] + \frac{2 Ec Pr}{\sqrt{Ra Pr}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \dots (11) \end{aligned}$$

حيث أن المعادلات (9) ، (10) ، (11) هي معادلات المتحكمة بالمسألة في الصيغة اللابعدية .

4- طريقة الحل :

نقوم بحل المعادلات بطريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية ADI الملائمة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية القطعية المكافئة (Parabolic Partial Differential Equations) و تتميز هذه الطريقة بمميزات عديدة جعلتها من الطرق المفضلة و ذات كفاءة عالية لإيجاد الحل التقريبي لمسألتنا

صيغة العامة لطريقة الاتجاهات المتعاقبة ضمناً هي :

$$1 - \frac{\theta_{i,j}^* - \theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} = (\delta_x^2 \theta_{i,j}^* + \delta_y^2 \theta_{i,j,n})$$

$$2 - \frac{\theta_{i,j,n+1} - \theta_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} = (\delta_x^2 \theta_{i,j}^* + \delta_y^2 \theta_{i,j,n+1})$$

إذ إن :

$$\theta_{i,j}^* = \theta_{i,j,(n+1)} \quad , \quad \delta_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \quad \delta_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

حيث نقوم بحل المعادلة (11) وبعدها نحل المعادلة (10) وكما يأتي :

أ- حل معادلة الطاقة (11) :

1- باتجاه محور X :

$$\frac{\theta_{i,j}^* - \theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} + u_{i,j,n} \frac{\theta_{i+1,j}^* - \theta_{i-1,j}^*}{2 \Delta x} + v_{i,j,n} \frac{\theta_{i,j+1,n} - \theta_{i,j-1,n}}{2 \Delta y} =$$

$$\frac{1}{w} \left[\frac{\theta_{i+1,j}^* - 2\theta_{i,j}^* + \theta_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta_{i,j+1,n} - 2\theta_{i,j,n} + \theta_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2} \right] + \frac{\Phi}{w} \dots (12)$$

$$\sqrt{Ra Pr} w = \quad , \quad \Phi = 2 Ec Pr \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \text{نفرض أن :}$$

2- باتجاه محور Y :

$$\frac{\theta_{i,j,n+1} - \theta_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} + u_{i,j,n} \frac{\theta_{i+1,j}^* - \theta_{i-1,j}^*}{2 \Delta x} + v_{i,j,n} \frac{\theta_{i,j+1,n+1} - \theta_{i,j-1,n+1}}{2 \Delta y} =$$

$$\frac{1}{w} \left[\frac{\theta_{i+1,j}^* - 2\theta_{i,j}^* + \theta_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta_{i,j+1,n+1} - 2\theta_{i,j,n+1} + \theta_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + \frac{\Phi}{w} \dots (13)$$

$$\sqrt{Ra Pr} w = \quad , \quad \Phi = 2 Ec Pr \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \text{نفرض أن :}$$

بعد تبسيط المعادلتين أعلاه نحصل من معادلة (12) على :

$$\begin{aligned}
 -\theta_{i-1,j}^* + 2 \left(\frac{\frac{w}{\lambda} + 1}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j}^* - \left(\frac{1 - \frac{wh}{2} u_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i+1,j}^* = \\
 \left(\frac{1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j-1,n} + \left(\frac{\frac{w}{\lambda} - 1}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j,n} + \\
 + 2 \left(\frac{1 - \frac{wh}{2} v_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j+1,n} + \left(\frac{\Phi h^2}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \dots \dots (14)
 \end{aligned}$$

حيث أن: $i = 1, \dots, N$ ، $\lambda = \frac{1}{h^2}$ ، $y h = \Delta x = \Delta$

$$\begin{aligned}
 A(i) &= -1, B(i) = 2 \left(\frac{\frac{w}{\lambda} + 1}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right), C(i) \\
 &= - \left(\frac{1 - \frac{wh}{2} u_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \\
 D(i) &= \left(\frac{1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j-1,n} + \left(\frac{\frac{w}{\lambda} - 1}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j,n} \\
 &+ 2 \left(\frac{1 - \frac{wh}{2} v_{i,j,n}}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right) \theta_{i,j+1,n} + \left(\frac{\Phi h^2}{1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n}} \right)
 \end{aligned}$$

ومن معادلة (13) نحصل على :

$$\begin{aligned}
 -\theta_{i,j-1,n+1} + \frac{2 \left[1 + \frac{w}{\lambda} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i,j,n+1} - \frac{\left[1 - \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i,j+1,n+1} = \\
 \frac{\left[1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i-1,j}^* + \frac{2 \left[\frac{w}{\lambda} - 1 \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i,j}^* + \frac{\left[1 - \frac{wh}{2} u_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i+1,j}^* + \\
 \frac{\Phi h^2}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]}
 \end{aligned}$$

..(15)

حيث أن: $i = 1, \dots, N$

$$A_1(i) = -1, \quad B_1(i) = \frac{2 \left[1 + \frac{w}{\lambda} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]},$$

$$C_1(i) = - \frac{\left[1 - \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]}$$

$$D_1(i) = \frac{\left[1 + \frac{wh}{2} u_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i-1,j}^* + \frac{2 \left[\frac{w}{\lambda} - 1 \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i,j}^* + \frac{\left[1 - \frac{wh}{2} u_{i,j,n} \right]}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]} \theta_{i+1,j}^* + \frac{\phi h^2}{\left[1 + \frac{wh}{2} v_{i,j,n} \right]}$$

وهذا يمثل حل معادلة الطاقة .

ب- حل معادلة الحركة (10) :

1-باتجاه محور X :

$$\frac{\Omega_{i,j}^* - \Omega_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\Omega_{i+1,j}^* - 2\Omega_{i,j}^* + \Omega_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\Omega_{i,j+1,n} - 2\Omega_{i,j,n} + \Omega_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega_{i,j,n} \dots (16)$$

2- باتجاه محور Y :

$$\frac{\Omega_{i,j,n+1} - \Omega_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\Omega_{i+1,j}^* - 2\Omega_{i,j}^* + \Omega_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\Omega_{i,j+1,n+1} - 2\Omega_{i,j,n+1} + \Omega_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega_{i,j,n+1} \dots (17)$$

بعد تبسيط المعادلتين أعلاه نحصل من معادلة (16) على :

$$-\Omega_{i-1,j}^* + \frac{2(1+\lambda\beta)}{\lambda\beta} \Omega_{i,j}^* - \Omega_{i+1,j}^* = \Omega_{i,j-1,n} + \left[\frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda\beta} + h^2 Ha^2 \right] \Omega_{i,j,n} + \Omega_{i,j+1,n} - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \dots (18)$$

حيث أن $i = 1, \dots, N$:

$$A(i) = -1, \quad B(i) = \frac{2(1+\lambda\beta)}{\lambda\beta}, \quad C(i) = -1$$

$$D(i) = \Omega_{i,j-1,n} + \left[\frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda\beta} + h^2 Ha^2 \right] \Omega_{i,j,n} + \Omega_{i,j+1,n} - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]$$

ومن معادلة (17) نحصل على :

$$-\Omega_{i,j-1,n+1} + \left[\frac{2(1+\lambda\beta)}{\lambda\beta} + h^2 Ha^2 \right] \Omega_{i,j,n+1} - \Omega_{i,j+1,n+1} = \Omega_{i-1,j}^* + \left[\frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda\beta} \right] \Omega_{i,j}^* + \Omega_{i+1,j}^* - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \dots\dots\dots (19)$$

حيث أن $i = 1, \dots, N$:

$$A_1(i) = -1, \quad B_1(i) = \left[\frac{2(1+\lambda\beta)}{\lambda\beta} + h^2 Ha^2 \right], \quad C_1(i) = -1$$

$$D_1(i) = \Omega_{i-1,j}^* + \left[\frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda\beta} \right] \Omega_{i,j}^* + \Omega_{i+1,j}^* - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]$$

وهذا يمثل حل معادلة الحركة .

نستخدم برنامج الحاسوبي فورتران للحصول على النتائج العددية التي تم تمثيلها برسومات توضيحية في الاستنتاجات .

5- الاستنتاجات :

1- لقد لوحظ من حل المعادلات للنموذج باستخدام طريقة ADI في الإحداثيات الكارتيزية بأنه يمكن الحصول على الحل اللازمي STEADY من الحل الزمني UNSTEADY لدالة الحرارة ولنقاط مختلفة وهذا واضح من الأشكال (3- أ) ، (3- ب) ، (3- ج) .

2- تأثير عدد Ra على دالة الحرارة في الإحداثيات الكارتيزية كان قليلا حيث تراوح قيم Ra بين 1200 - 1300 وكما موضح في الأشكال (5- أ) ، (5- ب) .

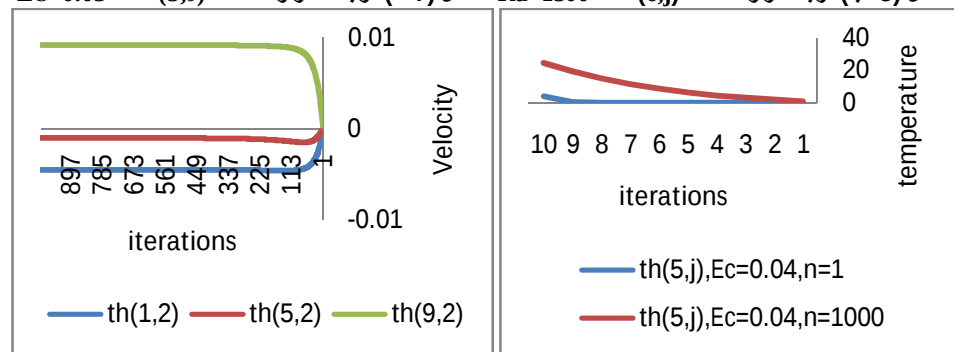
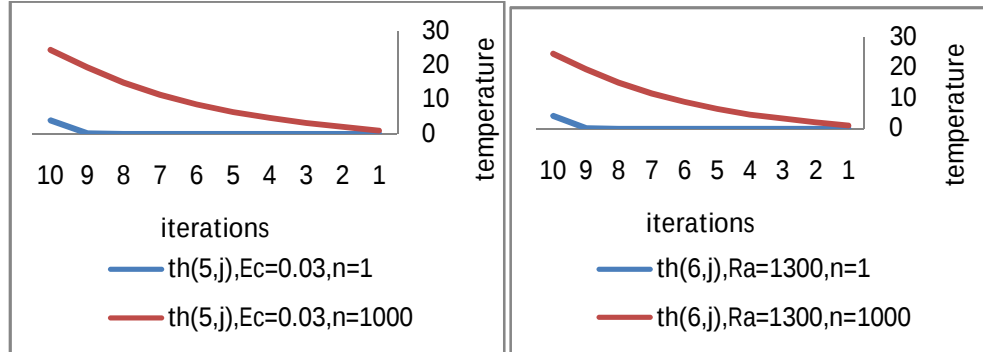
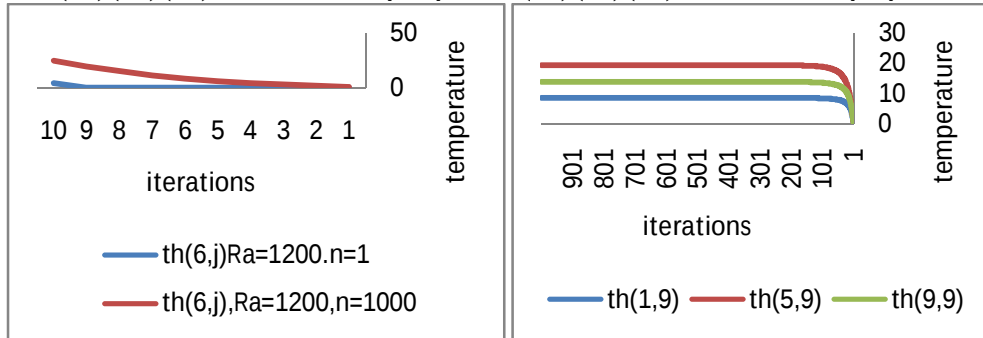
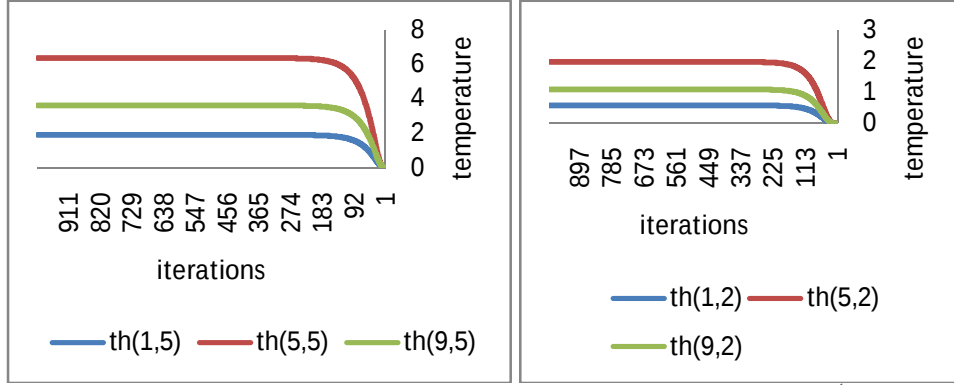
3- لقد لوحظ بأن تأثير عدد Ec ثابت في الإحداثيات الكارتيزية و تراوح قيم Ec بين (0,03 - 0,04) كما مبين في الأشكال (7- أ) ، (7- ب) .

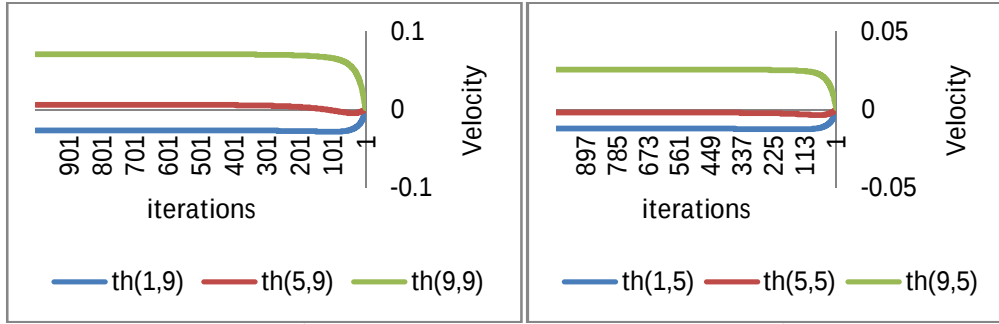
4- أما بالنسبة لدالة الحركة في الإحداثيات الكارتيزية تم الوصول من الحل اللازمي Steady إلى الحل الزمني Unsteady و لكن شكل (اسلوب) مختلفة عن دالة الحرارة في الإحداثيات الكارتيزية وكما مبين في الأشكال (9- أ) ، (9- ب) ، (9- ج) .

5- إن تأثير عدد Pr على دالة الحرارة في الإحداثيات الكارتيزية كان قليلا كما موضح في الأشكال (11- أ) ، (11- ب) حيث أن قيم Pr تراوح بين (0,8 - 0,9) .

6- إن تأثير عدد Ha على دالة الحركة في الإحداثيات الكارتيزية كان قليلا كما موضح في الأشكال (13- أ) ، (13- ب) حيث أن قيم Pr تراوح بين (1000 - 1200) .

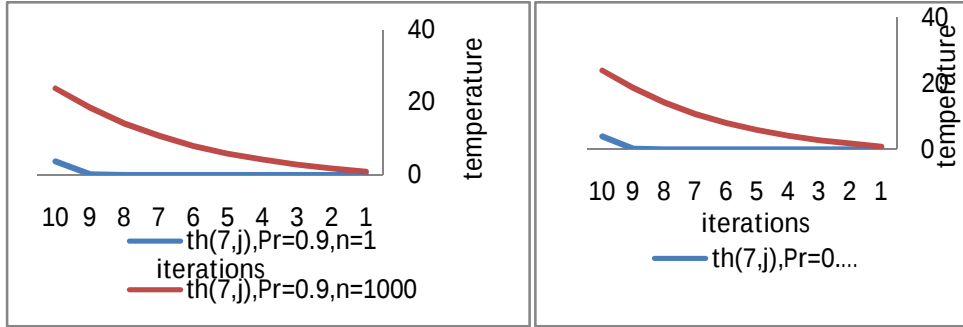
الأشكال التوضيحية :





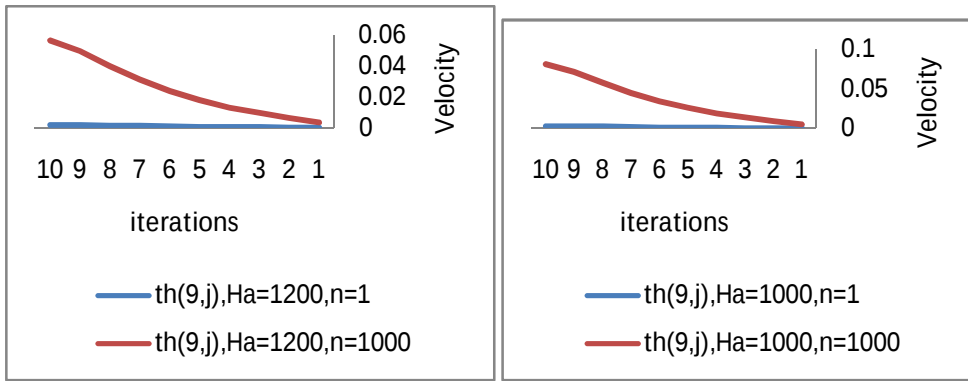
الشكل (9- ج) سرعة عند نقاط (1,9)، (5,9)، (9,9)

الشكل (9- ب) سرعة عند نقاط (1,5)، (5,5)، (9,5)



الشكل (11- ب) درجة الحرارة للنقطة (7,j) عندما $Pr=0.9$

الشكل (11- أ) درجة الحرارة للنقطة (7,j) عندما $Pr=0.8$



الشكل (13- ب) سرعة للنقطة (9,j) عندما $Ha=1200$

الشكل (13- أ) سرعة للنقطة (9,j) عندما $Ha=1000$

المصادر :

- [1]- Chien-Hsin-Chen, (2004), Combined heat and Mass transfer in MHD free convection from a vertical surface with Ohmic heating and viscous dissipation, Int. J . Engineering Science, 42, p. 699.
- [2]- H.A.Attia, and N.A.Kotb, "MHD Flow Between Two Parallel Plates with Heat Transfer ", ActaMechanica, 117 (1996), pp. 215-220.
- [3]- Hughes , W.F. & Brighton , J.A. , 1967 , "Fluid Dynamics ," Schaum's Outline Series in Engineering , McGraw-Hill Ltd. , USA .
- [4]- J. Hartmann, F. Lazarus, Kgl. Danske Videnskab. Mat.-Fys. Medd. 15 (6,7) 1937 .

- [5]- Jumaa , A.M. , 2001 , "convection in an inclined fluid layer ," unpublished Ph.D. thesis , University of Pune , India.
- [6]-Kuehn T.H. and Goldstein R.J., "Numerical solutionOfNavier-Stokes equations for laminar naturalConvection about a horizontal isothermal circularcylinder." Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 23,pp.971-979, (1980).
- [7]- Luciano M. De Socio, "Laminar free convectionaround horizontal circular cylinders." Int. J. HeatMass Transfer, Vol. 26, No. 11, pp.1669-1677,(1983).
- [8]-mohammed al-khawaja , Mohamed selmi ,(2010), Finite difference solutions of MFM square duct flow with heat transfer using matlabprogram ,heat transfer journal, Qatar university , doha , state of Qatar .
- [9]- N.Bozkaya , M.Tezer-Sezgin,(2008), Time-domain BEM solution of convection-diffusion-type MHD equations ,Department of Mathematics , Middle East Technical University, 06531 Ankara, Turkey ,Int J. Numer. Meth . Fluids ; 56:1969-1991 .
- [10]-Sparrow E.M. and Cess R.D., "Effect of magneticfield on free convection heat transfer." Int. J. HeatMass Transfer, Vol. 3, pp.267-274, (1961).
- [11]-Tani, "Steady Motion of Conducting Fluids in Channels Under Tranverse Magnetic Fields with Consideration of Hall Effect", Journal of Aerospace Sci., 29 (1962), p. 287.
- [12]-Wilks, G, "Magneto hydrodynamics free convectionabout a semi-infinite vertical plate in a strong crossfield." ZAMP, 27, 621-631, 1976 .
- [13] - Yang , Y. , 2003," Natural convective Flow and Heat Transfer in Vertical and Inclined Glazing Cavities," M.Sc. Thesis , University of Massachusettes.