المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (24) 2013
ص ص[92-113]

التحليل الإحصائي لعملية متسلسلة ألفا التصادفية مع تطبيق

د. مثنى صبحي سليمان *

المستخلص:

يتناول هذا البحث دراسة عملية تصادفيه هي عملية متسلسلة ألفا التصادفية α-*series stochastic process*، التي اقترحها الباحثون [*Braun et al., 2005*] كونها تعد تكملة مفيدة جداً للعملية التصادفية الهندسية المتزايدة *Increasing geometric stochastic process*. لقد تم تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا باستخدام عدد من الطرائق اللامعلمية، فضلاً عن استخدام اختبار مان *Mann test* لتحليل الاتجاه العام الرتيب للعملية التصادفية، وتقنية الرسم التي تختبر عائديه العملية لعملية متسلسلة ألفا.

يتضمن البحث تطبيقاً واقعياً يتناول فيه توقفات معامل صناعة السمنت في العراق. وقد أجريت تحليل إحصائي لعملية متسلسلة ألفا لتوقفات المعمل، واختبار ملاءمَة البيانات للعملية. وتم تمثيل العدد المتوقَّع لحالات توقف المعملو المقارنة بين طرائق التقدير المقترحة.

الكلمات الدالة: عملية متسلسلة ألفا التصادفية، طريقة المربعات الصغرى، إنتاج السمنت.

Statistical Analysis of α-series stochastic process with application

Abstract:

The research deal with the α-series stochastic process. It’s proposed by the researchers [Braun et a., 2005] as considered a very useful complement to the increasing geometric stochastic process. The parameters of α-series process are estimated using some nonparametric methods, as well as Mann test for trend analysis monotonous stochastic process, and technical graphic that tests the

* مدرس / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/2/17 ———————— تأريخ القبول 2013/3/4

ownership of the process to the α-series process. The research includes an application addresses the stops of Cement production factories in Iraq. The statistical analysis is performed for the factory stops as α-series process, and tests the appropriateness of the data for the process. The study also estimates the expected number of factory stops cases, and compares between the suggested estimation methods.

Key words: α-series stochastic process, least squares method, Cement production.

1) **المقدمة** *Introduction* :

هنالك شكلان رئيسان لدراسة العمليات التصادفية و هما مكملان لبعضهما البعض يهتمان بحالة العملية، الأول والذي يمثل دالة بدلالة عدد مرات حدوث الحوادث والتي يطلق عليها عملية العد *Counting Process*، والتي تعتمد على العدد المتراكم للحوادث ضمن فترة زمنية معينة. أما الشكل الثاني فان المعدل الزمني لحدوث الحوادث يعتمد على الزمن في تفسير الاتجاه، فعلى افتراض أن سلسلة المتغيرات العشوائية هي $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ فأن x_0 تمثل الزمن من نقطة الأصل إلى الحادثة الأولى، وان $\{x_i, i = 1,2, \dots\}$ تمثل الزمن بين حدوث حادثتين متتاليتين، وتسمى هذه العملية عملية الفترات بين الحوادث *Intervals Between Events Process* ، وتكون عادة غير متجانسة عندما تكون نقطة البداية المختارة هي الزمن، والجدول الآتي يبين ملخص العمليتين[*Cox & Lewis, 1966*] :

الجدول (1) : ملخص عمليتي العد والفترات بين الحوادث

العملية	نقطة الأصل للعملية	
	الزمن	حادثة
عملية الفترات بين الحوادث *Intervals Between Events Process*	$\{x_i, i = 1,2, \dots\}$ تمثل زمن الحدوث الأمامي وهي عملية بصورة عامة غير متجانسة	$\{x_i, i = 1,2, \dots\}$ عملية متجانسة
عملية العد *Counting Process*	N_t عملية متجانسة في حالة كون الزمن مستمرا	$N_t^{(f)}$ بصورة عامة عملية غير متجانسة في حالة كون الزمن مستمرا

2) عملية العد *Counting Process* :

تعد عملية العد *Counting Process* الطريقة الشائعة في دراسة أوقات الحدوث البينية للأحداث المتعاقبة لمجموعة البيانات. فإذا كانت العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية تَعد الحوادث التي تحدث في فترة زمنية معينة، فان هذه الحوادث لها نفس التوزيع مع مؤشر إلى آلية التصادفية في العملية، وإذا كانت مجموعة البيانات التي تمثل أوقات الحدوث البينية للأحداث المتعاقبة مستقلة ومتماثلة التوزيع (*i.i.d*) أي ليس لها اتجاه عام، فان عملية تجديد *Renewal Process* تكون ملائمة لها [*Parzen, 1962*]. وقد بين الباحث [*Chan et al.,2004*] انه لا يمكن استخدام عملية التجديد دائماً وذلك لأنها تكون ملائمة بشكل كبير فقط عندما تكون أوقات التشغيل المتعاقبة تتبع اتجاها عاما رتيبا بسبب تأثير الزمن والشكل المتراكم للعملية. كما وضح كل من الباحث [*Lam, 1988*] وكذلك [*Lam & Chan, 1998*] أن هنالك نماذج أكثر ملاءمة من نموذج عملية التجديد في تطبيق عملية العد الرتيبة، منها عملية متسلسلة ألفا α*-Series Process* ، والعملية الهندسية *Geometric Process* التي تعد عملية رتيبة وبسيطة *Simple Monotone Processes* وتعود الفكرة الأولى لها إلى الباحث [*Lam,1988*].

3) عملية متسلسلة ألفا α *-Series Process* :

تعد عملية متسلسلة ألفا العملية البديلة الأولى المحتملة للعملية الهندسية [*Lam, 1988*] عندما تكون العملية الهندسية غير ملائمة للمشكلة، إذ إن العملية الهندسية المتناقصة توضح بأنّ العدد المتوقّع لعدد الحوادث المتراكم في زمن اختياري غير موجود، في حين أن حالة العملية المتناقصة في عملية متسلسلة ألفا التصادفية لها عدد متوقع محدود من الحوادث المتراكمة عند زمن اختياري تحت بعض الشروط،

فضلاً عن ملائمة البيانات الملاحظة بنفس سهولة العملية الهندسية. أما الخصائص النظرية لعملية متسلسلة ألفا وبعض الفوائد أو المميزات التي تميزها عن العملية الهندسية فقد قدمها الباحثون [*Braun et al., 2008*] بشيء من التفصيل. فمثلاً عندما تكون العملية الهندسية متناقصة فان الدالة الهندسية $M(k,a)$ ستكون غير منتهية ولجميع قيم $k > 0$ ، أي لا يمكن إيجاد دالة المتوسط، أما عندما تكون عملية متسلسلة ألفا متناقصة فمن الممكن إيجاد دالة المتوسط لها [*Lam,1988*]

و [*Braun et al., 2005*]. كما إن مبرهنة الغاية المركزية *Central Limit Theorem* للعملية الهندسية غير موجودة، في حين أنها موجودة لعملية متسلسلة ألفا عندما تكون $\alpha < 0.5$ [*Braun et al., 2008*].

فإذا كانت العملية التصادفية $\{N(t), t \geq 0\}$ هي عملية عد، وأن x_k تمثل الفترة الزمنية بين الحادثتين عند الأزمان *k* و *k-1* ، عليه فان عملية العد $\{N(t), t \geq 0\}$ ذات المتغيرات العشوائية غير السالبة تعد عملية متسلسلة ألفا α*-series process* بالمعلمة α إذا كانت هنالك قيمة حقيقية مثل α بحيث أن [*Aydoğdu & Kara, 2012*]:

$$y_k = k^{\alpha} x_k \quad , \quad k = 1,2,\ldots \qquad \ldots (1)$$

إذ إن y_k تمثل عملية تجديد RP ، وهي عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية غير السالبة المستقلة والمتماثلة التوزيع *Independent and Identically Distributed*، وان *F* تمثل دالة التوزيع التراكمي *Cumulative Distribution Function* لهذه العملية بحيث:

$$F_k(x) = F(k^{\alpha}\, x_k) \quad , \quad k = 1,2,\ldots \qquad \ldots (2)$$

وباشتقاق المعادلة أعلاه نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function* لعملية متسلسلة ألفا كما يأتي [*Lam,1988*]:

$$\frac{\partial F_k(x)}{\partial x} = f_k(x) = k^{\alpha}\, f(k^{\alpha}\, x) \quad , \quad -\infty < \alpha < \infty \qquad \ldots (3)$$

ومن خصائص هذه العملية أنه عندما $(\alpha < 0)$ فان x_k تكون متسلسلة متزايدة تصادفياً، وعندما $(\alpha > 0)$ فان x_k تكون متسلسلة متناقصة تصادفياً، أما إذا كانت $(\alpha = 0)$ فان عملية متسلسلة ألفا تتحول إلى عملية تجديدو المتغير العشوائي x_k يتوزع بشكل متماثل لجميع قيم *k*. أما إذا كانت المتغيرات العشوائية تتوزع توزيعا أُسيا، وكانت $(\alpha = 1)$ فان عملية متسلسلة ألفا تصبح عملية ولادة خطية *Linear Birth Process* [*Braun et al., 2008*]. ويمكن تطبيق هذه العملية في الوثوقية *Reliability* والجدولة التصادفية *Stochastic Scheduling* التي تبين الاستعمالات المتعددة لنموذج عملية متسلسلة ألفا التصادفية.

4) معلمات عملية متسلسلة ألفا *Parameters of α-series process* :

لو فرضنا أن دالة التوزيع التراكمية لعملية متسلسلة ألفا هي $F_k(x)$ ، لها متوسط موجب μ وتباين محدود σ^2 ، ومن ثم فان α و μ و σ^2 هي المعلمات الرئيسة لعملية متسلسلة ألفا وذلك لأنها تقوم بتحديد متوسط وتباين x_k. فإذا كانت مجموعة البيانات $\{x_k, k = 1,2, \dots\}$ تمثل أوقات الحدوث البينية لعملية متسلسلة ألفا بحيث أن:

$$x_k = \frac{y_k}{k^\alpha} \qquad \dots (4)$$

إذ أن:

$$y_k = k^\alpha x_k \qquad \dots (5)$$

تمثل متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع (*i.i.d*).

فإن توقع x_k يمكن إيجاده باستخدام الصيغة الآتية:

$$E[x_k] = \frac{E[y_k]}{k^\alpha} \qquad \dots (6)$$

وعلى فرض إن توقع y_k يمثل μ ، فان توقع x_k يصبح بالصيغة الآتية:

$$E[x_k] = \frac{\mu}{k^\alpha} \qquad \dots (7)$$

كما أن تباين x_k يمكن حسابه بالصيغة الآتية:

$$Var[x_k] = \frac{\mathrm{Var}[y_k]}{(k^\alpha)^2} \qquad \dots (8)$$

وعلى فرض إن تباين y_k يمثل σ^2، فان تباين x_k يصبح بالصيغة الآتية:

$$Var[x_k] = \frac{\sigma^2}{k^{2\alpha}} \qquad \dots (9)$$

5) تحليل الاتجاه العام لعملية متسلسلة ألفا *Trend analysis of α-series process*:

إن تحليل الاتجاه العام لعملية متسلسلة ألفا يُعد مهماً في تحديد الشكل العام للعملية، فعند التطبيق على بيانات حقيقية نواجه عدة مشاكل أساسية، أهمها مدى ملاءمة بيانات الدراسة مع عملية متسلسلة ألفا التصادفية، ولاختبار ذلك فقد اقترح الباحث [*Lam,1992*]عددا من الاختبارات على العملية التصادفية والتي تساعدنا في معرفة فيما إذا كانت البيانات تتبع عملية متسلسلة ألفا أم لا.

إن اختبار الاتجاه العام للبيانات في عملية متسلسلة ألفا هو اختبار الاتجاه العام الرتيب *Trend analysis monotone test* للبيانات.و هناك بعض الطرائق البسيطة لاختبار الاتجاه للعملية التصادفية، منها تقنية الرسم *Technical Graphic* و اختبار لابلاس *Laplace's Test* واختبار مان *The Mann Test* لاختبار وجود الاتجاه في البيانات [*Ascher and Feingold ,1984*] و [*Nachar, 2008*]. كما إن هنالك العديد من التقنيات التي ناقشها الباحثان [*Cox and Lewis,1966*] ومنها:

5-1) تقنية الرسم *Technical Graphic*:

تعد تقنية الرسم من التقنيات البسيطة لاكتشاف وجود الاتجاه الرتيب للبيانات، وتعتمد على رسم العدد المتراكم للحوادث مع الزمن التراكمي، ومن الشكل الناتج يمكن الوصول إلى تصور حدسي عن طبيعة الاتجاه العام للبيانات سواءً أكان الاتجاه متزايداً أم متناقصاً أم فاقد الاتجاه، وذلك من خلال ميل الفترات البينية للحوادث نحو الزيادة أو النقصان، ومن الشكل التراكمي للعدد الحوادث الذي يكون بشكل محدب أو مقعر.

5-2)اختبار مان *The Mann Test* :

يستخدم اختبار مان للكشف عن وجود اتجاه رتيب للبيانات،و لإجراء ذلك نحتاج إلى صياغة الفرضيات الآتية:

H_0: البيانات ليس لها اتجاه رتيب

H_1: البيانات لها اتجاه رتيب

لقد اقترح الباحثان [*Ascher and Feingold ,1984*] استخدام جميع المعلومات المعنية في مجموعة البيانات، وعلى افتراض أن أوقات الحدوث البينية المحتملة هي $\{x_k, k = 1,2, \dots , n\}$ فانه يتم تعريف المتغير العشوائي U_n وذلك من خلال مقارنة كافة الفترات البينية x_i مع x_j عندما $(i < j)$ ، وحساب عدد مرات $(x_i < x_j)$ عندما $(i < j)$. وعليه وتحت فرضية العدم فانه يمكن صياغة المختبر الإحصائي الآتي[*Nachar, 2008*]:

$$Z = \frac{U_n - \mu_U + \frac{1}{2}}{\sigma_U} \qquad \dots(10)$$

إذ إنَّ Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط صفر وتباين واحد عندما $(n \geq 10)$، أما الثابت ½ الذي أُضيف فهو لغرض تصحيح الاستمرارية. وبما أن: [*Aydoğdu & Kara, 2012*]

$$\sigma_U^2 = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72 \quad \text{و} \quad \mu_U = n(n-1)/4$$

وبالتعويض عن قيمة الوسط الحسابي والتباين لـ U، نحصل على الصيغة النهائية للمختبر الإحصائي:

$$Z = \frac{U_n - n(n-1)/4 + \frac{1}{2}}{\sqrt{(2n^3 + 3n^2 - 5n)/72}} \qquad \dots (11)$$

6) ملاءمة البيانات لعملية متسلسلة ألفا *Testing data for the α-series process* :

إن الخطوة الآتية في التحليل الإحصائي لعملية متسلسلة ألفا التصادفية بعد معرفة الاتجاه الذي ستؤول إليه العملية هو اختبار فيما إذا كانت البيانات تتفق مع عملية متسلسلة ألفا أم لا، ولحل هذه المشكلة نفرض أن لدينا عملية تصادفيه $\{x_k, k = 1,2, \dots\}$، وفرضنا أن:

$$y_k = k^{\alpha} x_k \quad , \quad k = 1,2, \dots \qquad \dots (12)$$

إذ إن $(k^{\alpha} x_k)$ تمثل عملية تجديد *RP* ، وهي متتابعة من المتغيرات العشوائية مع متوسط μ_k الذي يشير إلى المستوى الأولي لعملية متسلسلة ألفا ويقيس اتجاهها.

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (12) تم الحصول على:

$$\ln y_k = \alpha \ln k + \ln x_k \qquad \dots (13)$$

وبما إن y_k عبارة عن متغير عشوائي مستقل وله نفس التوزيع وبدالة توزيع تراكمي $F_k(y)$، عليه يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي البسيط *Simple linear regression model* ، وبالشكل الآتي:

$$ln\, y_k = \gamma + e_k \qquad k = 1,2, \dots, n \qquad \dots (14)$$

حيث أن:

$$\mathrm{E}[ln\, y_k] = \gamma \qquad \dots (15)$$

و إن e_k يمثل متتابعة من المتغيرات العشوائية غير السالبة المستقلة والمتماثلة التوزيع (*i.i.d.*) بوسط حسابي صفر وتباين σ_e^2 .

ومن المعادلة (13) تم الحصول على النموذج الآتي:

$$ln\, x_k = ln\, y_k - \alpha\, ln\, k \qquad \dots (16)$$

ومن خلال تعويض المعادلة (14) في المعادلة (16) تم الحصول على:

$$ln\, x_k = (\gamma + e_k) - \alpha\, ln\, k \qquad \dots (17)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (17) تم الحصول على النموذج الآتي:

$$ln\, x_k = \gamma - \alpha\, ln\, k + e_k \quad , \quad k = 1,2, \dots, n \qquad \dots (18)$$

عندها يتم رسم المعادلة (18) مع اللوغاريتم الطبيعي للزمن $\ln k$ ، ثم يلاحظ فيما إذا كان هنالك علاقة خطية بينهما أم لا، فإذا كان الرسم يمثل علاقة خطية، يتم الاستنتاج إن البيانات x_k تعود إلى عملية متسلسلة ألفا التصادفية [*Aydoğdu & Kara, 2012*] .

7) تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا *Parameters estimation of α -series process*:

مما تقدم يلاحظ أنّ لعملية متسلسلة ألفا ثلاث معلمات مهمة وهي α و μ و σ^2 ، وعند تطبيق عملية متسلسلة ألفا على بيانات واقعية يتم الحاجة إلى تقدير هذه المعلمات. هنالك طرائق عديدة اقترحها

العديد من الباحثين لتقدير معلمات هذه العملية، وأغلب البحوث الحديثة حول هذا الموضوع اقترح باحثوها طرائق معلمية *Parametric Methods* في التقدير، كما في بحث [*Aydoğdu et al., 2010*] الذين اقترحوا طريقة الإمكان الأعظم المعدلة *Modified Maximum Likelihood Method* لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا. من ناحيةٍ أُخرى فإن هنالك طرائق لامعلمية *Non-Parametric Methods* للتقدير، وهي واسعة الانتشار كونها لا تفترض أية شروط مسبقة، لذا فهي لا تكون مقيّدة بافتراضات قد لا تتلاءم مع طبيعة المسألة أو البيانات.

لقد تم في هذا البحث اقتراح استخدام طريقة الرسم *Graphical Method* لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا، فضلاً عن طريقة المربعات الصغرى *Least Squares Method* التي تُعد من الطرائق المعروفة في التقدير، ويتم في أدناه توضيح هاتين الطريقتين لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا.

7-1) **طريقة الرسم** *Graphical Method*:

تُعد طريقة الرسم إحدى الطرائق التقريبية لتقدير معلمات العمليات التصادفية، وذلك من خلال رسم أوقات الحدوث البينية بالمقياس اللوغاريتمي مع لوغاريتم الزمن. فمن المعادلة (18) يلاحظ ما يأتي:

$$ln\, x_k = \gamma - \alpha\, ln\, k$$

وعند رسم المستقيم الملائم للعملية يمكن إيجاد مقدّرات خام لمعلمتي القياس والشكل للدالة، إذ إنَّ تقاطع المستقيم مع المحور الصادي يُعطي مقدّراً تقريبياً لمعلمة القياس γ . أما ميل المستقيم فيُعطي مقدّراً تقريبياً لمعلمة الشكل $-\alpha$.

ويمكن تقدير معلمات المتوسط μ والتباين σ^2 لعملية متسلسلة ألفا بالاعتماد على الصيغة (12) وبشكل لامعلمي كما يأتي:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{y}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^{\hat{\alpha}}x_k \quad \ldots (19)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k - \bar{\hat{y}}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{\hat{\alpha}}x_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^{\hat{\alpha}}x_k}{n}\right)^2 \quad \ldots (20)$$

من المعادلتين أعلاه لوحظ انه عندما $(\alpha = 0)$ فان عملية متسلسلة ألفا تتحول إلى عملية تجديد، وتكون تقديرات معلمات μ و σ^2 للعملية هي كما يأتي:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}_k \qquad \dots (21)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_k)^2 = \sigma_x^2 \qquad \dots (22)$$

2-7) طريقة المربعات الصغرى *Least Squares Method* :

تعد طريقة المربعات الصغرى من الطرائق اللامعلمية المهمة في التقدير، إذ تم لوحظ أنَّ المعدل الزمني للحدوث في متسلسلة ألفا يتلاءم مع هذه الطريقة، وهذا ما سيتم عرضهُ في هذه الفقرة. إن مبدأ هذه الطريقة يعتمد على تقليل مجموع مربعات الخطأ *Sum of squares error* للحصول على أفضل مقدر لمعلمات عملية متسلسلة ألفا. فإذا كانت العملية التصادفية $\{x_k, k = 1,2,\dots\}$ تمثل أوقات الحدوث البينية لعملية متسلسلة ألفا، فان مجموع مربعات الخطأ بالمقياس اللوغاريتمي هو:

$$SSE = \sum_{k=1}^{n}[\ln y_k - E(\ln y_k)]^2 \qquad \dots (23)$$

وبالتعويض عن قيمة $\ln y_k$ من المعادلة (13) والمعادلة (15) تم الحصول على:

$$SSE = \sum_{k=1}^{n}[\ln x_k + \alpha \ln k - \gamma]^2 \qquad \dots (24)$$

و لتقليل مجموع مربعات الخطأ SSE إلى اقل ما يمكن يتم أخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة (24) بالنسبة للمعلمتين γ و α ثم مساواتهما بالصفر للحصول على:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \gamma} = -2\sum_{k=1}^{n}[\ln x_k + \alpha \ln k - \gamma] = 0 \qquad \dots (25)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \alpha} = 2\sum_{k=1}^{n}[\ln x_k + \alpha \ln k - \gamma]\ln k = 0 \qquad \dots (26)$$

ومن المعادلة (25) تم الحصول على:

$$-\sum_{k=1}^{n}\ln x_k - \alpha\sum_{k=1}^{n}\ln k + n\gamma = 0 \qquad \dots (27)$$

و عليه فان:

$$\gamma = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k + \alpha \sum_{k=1}^{n} ln\, k\right] \qquad \dots (28)$$

ومن المعادلة (26) تم الحصول على:

$$\sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k + \alpha \sum_{k=1}^{n} (ln\, k)^2 - \gamma \sum_{k=1}^{n} ln\, k = 0 \qquad \dots (29)$$

وبتعويض المعادلة (28) في المعادلة (29) وتبسيطها تم الحصول على:

$$n\sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k - \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k \sum_{k=1}^{n} ln\, k + \alpha\left[n\sum_{k=1}^{n}(ln\, k)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} ln\, k\right)^2\right] = 0$$

و عليه فان مقدر المربعات الصغرى للمعلمة α هو:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k \sum_{k=1}^{n} ln\, k - n\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\, ln\, k}{n\sum_{k=1}^{n}(ln\, k)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} ln\, k\right)^2} \qquad \dots (30)$$

ولإيجاد مقدر المربعات الصغرى للمعلمة γ يعويض مقدر المعلمة α أعلاه في المعادلة (28) كما يأتي:

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{k=1}^{n} ln\, k \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\, ln\, k - \sum_{k=1}^{n}(ln\, k)^2 \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} ln\, k\right)^2 - n\sum_{k=1}^{n}(ln\, k)^2} \qquad \dots (31)$$

أما تقدير المعلمتين μ و σ^2 فيقدر أولا تباين الخطأ من خلال تشبيه المعادلة (18) بنموذج الانحدار الخطي البسيط الآتي:

$$Y_k = a + bX_k + e_k \qquad \dots (32)$$

أما المعادلة (18) فهي:

$$ln\, x_k = \gamma - \alpha\, ln\, k + e_k \quad , \quad k = 1,2,\dots,n$$

أي إن:

$$\left.\begin{array}{r} Y_k = ln\, x_k \\ a = \gamma \\ b = -\alpha \\ X_k = ln\, k \end{array}\right\} \qquad \dots (33)$$

وبما إن تباين الخطأ لمعادلة خط الانحدار هو [*Spiegel et al., 2001*]:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - a\sum_{k=1}^{n} Y_k - b\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k}{n-2} \qquad \dots (34)$$

وبعد تعويض المعادلات (33) في (34) تم الحصول على :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(ln\, x_k)^2 - \gamma\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k + \alpha\sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k}{n-2} \qquad \dots (35)$$

وبالتعويض عن مقدر γ في المعادلة (35) تم الحصول على الآتي:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(ln\, x_k)^2 - \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\right)^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} ln\, k \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\right] + \alpha\sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(ln\, x_k)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\right)^2\right] - \frac{1}{n}\alpha\sum_{k=1}^{n} ln\, k \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k + \alpha\sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(ln\, x_k)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\right)^2\right] - \alpha\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\, k \sum_{k=1}^{n} ln\, x_k - \sum_{k=1}^{n} ln\, k\, ln\, x_k\right] * \frac{\alpha}{\alpha}}{n-2}$$

وبإجراء بعض التبسيطات على المقدار أعلاه، تم الحصول على مقدر تباين الخطأ لمعادلة خط الانحدار الآتي:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(ln\, x_k)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} ln\, x_k\right)^2\right] - \hat{\alpha}^2\left[\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right)^2\right]}{n-2} \qquad \dots (36)$$

ومن المعادلة (14) يمكن إيجاد مقدر المعلمة μ لعملية متسلسلة ألفا كما يأتي:

$$y_k = e^{(\gamma + e_k)} \quad , \quad k = 1,2, \dots, n \qquad \dots (37)$$

وبأخذ التوقع للطرفين تم الحصول على:

$$E[y_k] = E[e^{\gamma + e_k}] = e^{\gamma} E[e^{e_k}] \qquad \dots (38)$$

ويمكن إيجاد المقدار e^{e_k} باستخدام متسلسلة تايلر على النحو يأتي:

$$e^{e_k} = 1 + e_i + \frac{{e_i}^2}{2} + \cdots$$

وبمـــــا أن: $E[e_i] = 0,\quad E[{e_i}^2] = \sigma_e^2$

وعليه فان مقدر المعلمة μ لعملية متسلسلة ألفا هو:

$$\hat{\mu} = E[y_k] = e^{\hat{\gamma}}E\left[1 + e_i + \frac{{e_i}^2}{2} + \cdots\right] \approx e^{\hat{\gamma}}\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_e^2}{2}\right) \qquad \dots (39)$$

أما مقدر المعلمة σ^2 لعملية متسلسلة ألفا فهو[*Aydoğdu & Kara, 2012*]و [*Lam, 1992*]:

$$var(y_k) = var(e^{\gamma+e_k}) = e^{2\gamma}var(e^{e_k}) \approx e^{2\gamma}var(e_k) \qquad \dots (40)$$

أي إن:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_e^2\, e^{2\hat{\gamma}} \qquad \dots (41)$$

8) **اختبار جودة التوفيق** *Goodness of Fit Test* :

لغرض مقارنة جودة التوفيق بين الطرائق المختلفة المستخدمة لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا، استخدام معيار خطــأ النسبة الأعظم *Maximum Percentage Error* الذي يهتــم بالتركيب الفردي لمجموعة البيانات ويكون على وفق الصيغة الآتية:

$$MPE = \max_{1 \le k \le n}\left\{\left|T_k - \hat{T}_k\right| / T_k\right\} \qquad \dots (42)$$

إذ أن:

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} x_j \qquad and \qquad \hat{T}_k = \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j$$

9) **الجانب التطبيقي** *Application* :

تعد صناعة السمنت في العراق من أقدم الصناعات وأكثرها تطورا وتقدما ومن أقواها تـأثيرا في الاقتصاد الوطني، ولعل من الضروري أن نذكر المركز المرموق الذي احتله السمنت العراقي في السوق المحلي وأسواق التصدير من حيث جودته ودقة مواصفاته والدور الكبير الذي أدته هذه الصناعة في خدمة

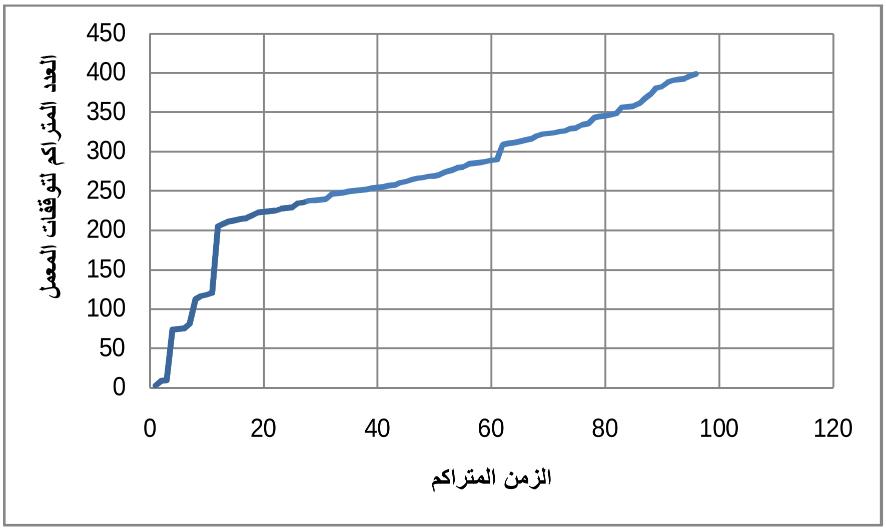
الاقتصاد العراقي وحركته العمرانية. وقد ساهمت صناعة السمنت في إرساء صرح شامخ للصناعة في العراق، وقدمت دليلا قاطعا على إمكانية التطور الصناعي لهذا البلد العزيز في أصعب الظروف.

طبقت عملية متسلسلة ألفا التصادفية على معامل إنتاج السمنت في العراق، وقد جمعت البيانات من (الشركة العامة للسمنت الشمالية/ معامل سمنت بادوش الجديد) كونها تمثل الجانب التطبيقي للبحث، وذلك من خلال التقرير اليومي لساعات التوقف اليومية الذي يُحدد فيه عدد التوقفات الخاصة بمعامل الكسارة والفرن وطاحونة المواد وطاحونة السمنت وخلال العامين 2010 و 2011 . ومن البيانات التي جمعت تبين إن المعامل كافة يعتمد عملها وتوقفها على معمل الكسارة بشكل كبير، وذلك لان معمل الكسارة يُعد العملية الإنتاجية الأولى في إنتاج السمنت، لذا ارتأى الباحث دراسة توقفات معمل الكسارة في إنتاج السمنت كونه مستقلا عن بقية المعامل ولا يتأثر عمله أو توقفه بمعامل أخرى.

إن البيانات التي تم استخدمت في البحث تمثل الفترات الزمنية بالأيام لتوقفات معمل الكسارة، إذ تم عد الأيام للفترات من توقف المعمل لغاية تشغيله خلال الفترة الزمنية من 2010/1/1 ولغاية 2011/12/31، وتم الحصول على 96 حالة توقف خلال الفترة قيد الدراسة، والبيانات مرفقة في الملحق.

1-9) اختبار الاتجاه العام الرتيب لتوقفات المعمل:

إنَّ الإجراء الأول في التحليل الإحصائي لعملية متسلسلة ألفا التصادفية على توقفات معمل الكسارة لصناعة سمنت الشمالية خلال الفترة الزمنية من تاريخ 2010/1/1 ولغاية 2011/12/31 هو اختبار فيما إذا كان للعملية اتجاه عام رتيب أم لا، ولإجراء ذلك يتم رسم العدد المتراكم لفترات توقف المعمل x_k مع الزمن التراكمي k، للوصول إلى تصور حدسي عن طبيعة الاتجاه، والشكل الآتي يوضح ذلك:



الشكل (1): رسم العدد المتراكم لفترات توقف المعمل مع الزمن التراكمي خلال العامين 2010 و 2011.

من الشكل (1) لوحظ إن الشكل العام للعملية هو باتجاه التزايد، مما يبين أن العملية هي عملية تصادفيه متزايدة وبشكل رتيب. ولبيان صحة هذه النتيجة تم استخدام اختبار مان *Mann Test* في الفقرة (2-5) للكشف عن وجود اتجاه رتيب للبيانات أم لا، ولإجراء ذلك نحتاج إلى صياغة الفرضيات الآتية:

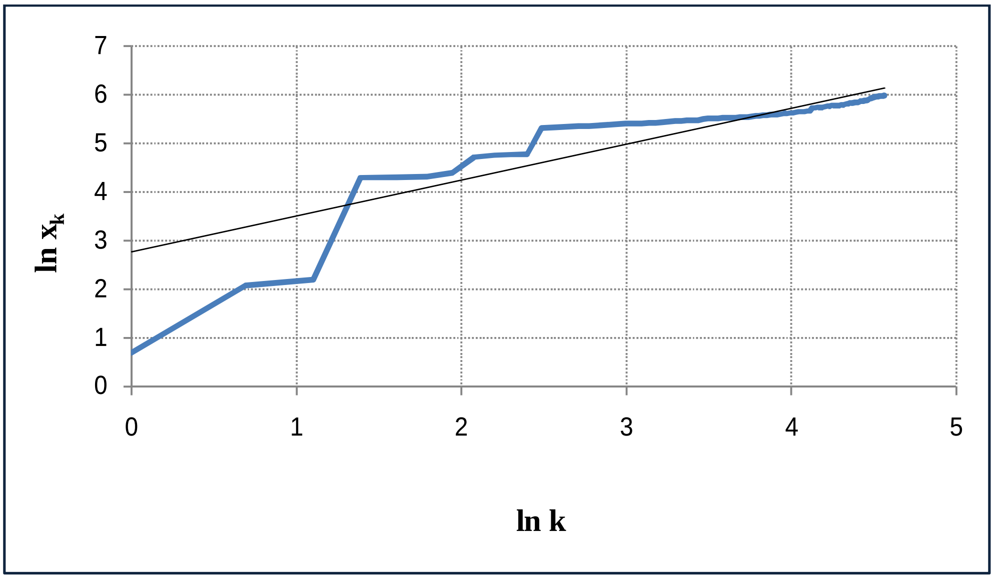
H_0: بيانات معمل الكسارة ليس لها اتجاه رتيب

H_1: بيانات معمل الكسارة لها اتجاه رتيب

ولاختبار الفرضية أعلاه تم إعداد برنامج خاص باللغة البرمجية *MATLAB R2008b* لحساب قيمة المختبر الإحصائي Z من المعادلة (11) ، وقد تم الحصول على قيمة ($Z = -4.0926$) المحسوبة ، ومن خلال مقارنتها مع القيمة الجدوليه تحت مستوى معنوية 0.05، تم رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة، أي إن هنالك اتجاها عاما رتيبا للبيانات، وهذا ما يؤيد نتائج تقنية الرسم.

2-9) ملاءمة بيانات المعمل لعملية متسلسلة ألفا:

إن الإجراء الثاني بعد معرفة الاتجاه العام الرتيب للبيانات هو اختبار فيما إذا كانت البيانات تتفق مع عملية متسلسلة ألفا أم لا، ولحل هذه المشكلة تم رسم اللوغاريتم الطبيعي للفترات بين حدوث توقفات المعمل مع اللوغاريتم الطبيعي للزمن، كما يأتي:



الشكل (2): رسم اللوغاريتم الطبيعي للفترات بين حدوث توقفات معمل الكسارة مع اللوغاريتم الطبيعي للزمن خلال العامين 2010 و 2011.

من الشكل أعلاه يلاحظ وجود علاقة خطية طردية بين اللوغاريتم الطبيعي للفترات بين حدوث توقفات معمل الكسارة مع اللوغاريتم الطبيعي للزمن، وهذا يدل على إن البيانات x_k تعود إلى عملية متسلسلة ألفا، فضلاً عن أن الرسم يوضح أن العملية هي متزايدة مع الزمن.

9-3) تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا لتوقفات معمل الكسارة:

تم في هذه الفقرة تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا، وهي ثلاث معلمات α و μ و σ^2 ، لتوقفات معمل الكسارة باستخدام الطرايقتين المقترحتين في البحث وهما طريقتا الرسم والمربعات الصغرى .

أ- طريقة الرسم :

من الشكل (2) تم إيجاد مقدّرات خام لمعلمتي القياس والشكل للدالة، إذ إنَّ تقاطع المستقيم مع المحور الصادي يُعطي مقدّراً تقريبياً لمعلمة القياس γ ، أما ميل المستقيم فيُعطي مقدّراً تقريبياً لمعلمة الشكل $-\alpha$. كما تم إيجاد مقدري معلمتي المتوسط μ والتباين σ^2 لعملية متسلسلة ألفا بالاعتماد على الصيغتين (19) و (20)، والجدول الآتي يبين المقدرات التي تم الحصول عليها:

الجدول (2): مقدرات طريقة الرسم لمعلمات عملية متسلسلة ألفا لتوقفات معمل الكسارة.

parameter	*Estimate*
$\hat{\alpha}$	-0.7
$\hat{\gamma}$	2.8
$\hat{\mu}$	19.4659
$\hat{\sigma}^2$	30.9528

من الجدول (2) لوحظ أن القيمة المقدرة للمعلمة ألفا (α) هي ذات قيمة سالبة، مما يدل على أن عملية متسلسلة ألفا لتوقفات معمل الكسارة خلال العامين 2010 و 2011 هي عملية متزايدة مع الزمن، وهذا ما تم تأكيده من الشكل (2).

ب - طريقة المربعات الصغرى:

إنَّ الطريقة الأخرى المستخدمة لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا لتوقفات معمل الكسارة هي طريقة المربعات الصغرى، ولإجراء هذا التقدير تم استخدام البرنامج المُعد لهذا الغرض باللغة البرمجية *MATLAB R2008b*، والجدول الآتي يبيّن مقدّرات المربعات الصغرى في الفقرة (7-2):

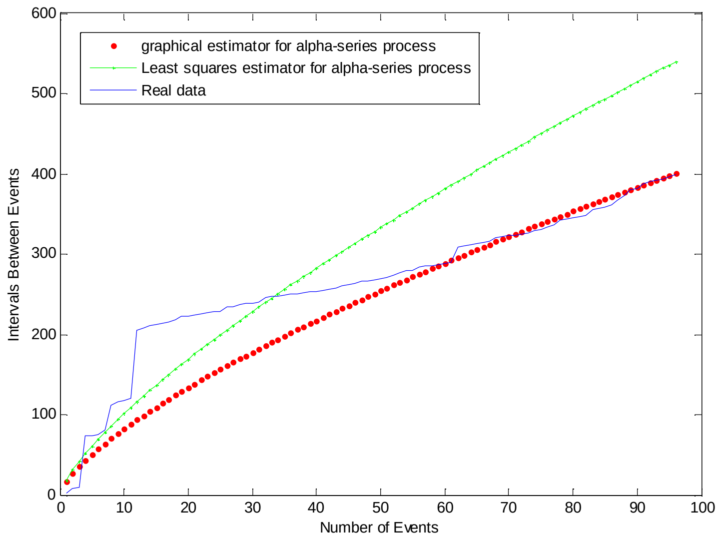
الجدول (3): مقدرات المربعات الصغرى لمعلمات عملية متسلسلة ألفا لتوقفات معمل الكسارة.

parameter	*Estimate*
$\hat{\alpha}$	-0.7397
$\hat{\gamma}$	2.772
$\hat{\sigma}_e^2$	0.143
$\hat{\mu}$	17.1339
$\hat{\sigma}^2$	36.5649

10) مناقشة النتائج *Discussion of Results* :

لمناقشة النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث، تم في هذه الفقرة تقدير عملية متسلسلة ألفا لمعمل الكسارة بالاعتماد على مقدرات المعلمات التي تم الحصول عليها من طريقتي الرسم والمربعات

الصـغرى الموضـحة فـي الجـدولين (2) و(3)، وباسـتخدام البرنـامج المعـد لهـذا الغـرض باللغـة البرمجيـة *MATLAB R2008b*، تم الحصـول علـى العدد المتوقع لتوقفات معمل الكسارة خـلال الفتـرة الزمنيـة قيد الدراسـة. وقد تـم رسم دالـة متسلسـلة ألفا لتوقفـات معمل الكسـارة بـالطريقتين المسـتخدمتين مقارنـةً مـع القيم الحقيقية، وكما في الشكل الآتـي:



الشكل (3): دوال مقدرات متسلسلة ألفا للفترات بين حدوث توقفات معمل الكسارة خلال العامين 2010 و2011 بالطريقتين المستخدمتين مقارنةً مع القيم الحقيقية.

ولغـرض المقارنـــة بـين بــالطريقتين المســتخدمتين لتقــدير دالــة متسلســلة ألفــا لتوقفــات معمــل الكسارة،استخدمت معيار خطـأ النسبة الأعظم *MPE* حسب الصيغـة (42)، وباستخدام البرنـامج المعد لهذا الغرض باللغة البرمجية *MATLAB R2008b* تم الحصول على القيم في الجدول الآتـي:

الجدول (4): قيم *MPE* للطريقتين المستخدمتين لتقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا لمعمل الكسارة.

Method	*MPE*
Graphical	8.2244
Least Squares	7.2223

يلاحظ من الجدول أعلاه أن قيمة خطأ النسبة الأعظم *MPE* لمقدرات طريقة المربعات الصغرى أقل من قيمة خطأ النسبة الأعظم *MPE* لمقدرات طريقة الرسم لعملية متسلسلة ألفا، مما يدل على إن طريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا أفضل من طريقة الرسم.

11) الاستنتاجات والتوصيات *Conclusions and Recommendations* :

تناول هذا البحث تحليلاً إحصائيا لعملية تصادفية لم يتم التطرق إليها إلا نادرا من قبل عدد من الباحثين، وقد تم في هذا البحث التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات يمكن إجمالها بالنقاط الآتية:

أ- إن البيانات الرتيبة في العمليات التصادفية تكون ملائمة بشكل كبير لعملية متسلسلة ألفا، وكما هو واضح من الشكل (3) الذي يبين التوافق الكبير بين عملية متسلسلة ألفا والبيانات الحقيقية الرتيبة.

ب- من خلال رسم اللوغاريتم الطبيعي للفترات بين حدوث توقفات معمل الكسارة مع اللوغاريتم الطبيعي للزمن، ومن قيمة ألفا التي ظهرت سالبة، استنتج ان توقفات معمل الكسارة تعود إلى عملية متسلسلة ألفا المتزايدة مع الزمن.

ج- إن مقدرات عملية متسلسلة ألفا لعدد حالات التوقف في معمل الكسارة قريبة جداً من القيم الحقيقية مهما كانت طريقة تقدير المعلمات.

د- من خلال قيمة خطأ النسبة الأعظم *MPE* ، تم التوصل إلى أن طريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا أفضل من طريقة الرسم في التقدير.

هـ- يكون تقدير متوسط وتباين عملية متسلسلة ألفا التصادفية مساوياً لمتوسط وتباين البيانات الحقيقية عندما تكون قيمة $(\alpha = 0)$، وهذا ما تم إثباتهُ في الصيغتين (21) و(22) .

مما تقدم يمكن التوصية بالآتي:

أ- استخدام طرائق أخرى في تقدير معلمات عملية متسلسلة ألفا، مثل الطرائق المعلمية، للمقارنة مع الطريقتين المستخدمتين في البحث.

ب- نمذجة بقية معامل الشركة العامة للسمنت على وفق عملية متسلسلة ألفا للوصول إلى تصور كامل حول العملية الإنتاجية للسمنت.

ج- أوصي باعتماد نتائج البحث التطبيقية في شركات إنتاج السمنت المختلفة، وذلك لدقة النتائج التي تم التوصل أليها.

د- للدراسات المستقبلية أوصي بإجراء مقارنة بين عملية متسلسلة ألفا وعمليات أخرى، مثل العملية الهندسية أو عملية التجديد أو العملية البواسونية غير المتجانسة.

12)المصادر: *References* :

1. Ascher, H., Feingold, H. (1984),"Repairable Systems Reliability". Marcel Dekker, New York.
2. Aydoğdu, H., Senoglu, B. and Kara, M. (2010),"Application Of MML Methodology To An α-Series Process With Weibull Distribution". Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 39 (3) , 449 - 460.
3. Aydoğdu, H. and Kara, M.(2012),"Nonparametric Estimation in α-Series Processes". Computational Statistics and Data Analysis 56,190-201.
4. Braun, W.J., Li, W. and Zhao, Y.Q.(2005),"Properties of the Geometric and Related Processes". Naval Research Logistics 52, 607-616.
5. Braun, W.J., Li, W. and Zhao, Y.Q.(2008)," Some Theoretical Properties of the Geometric and α-Series Processes". Communications in Statistics-Theory and Methods 37, 1483-1496.
6. Chan, S.K., Lam, Y. and Leung, Y.P.(2004),"Statistical Inference for Geometric Processes with Gamma Distribution". Computational Statistics and Data Analysis 47,565–581.
7. Cox, D.R. and Lewis, P.A.W. (1966)," The Statistical Analysis of Series of Events". Mathuen, London.
8. Lam, Y. (1988),"Geometric Process and Replacement Problem". Acta Mathematicae Applicatae Sinica 4, 366-377.
9. Lam, Y. (1992),"Nonparametric Inference for Geometric Processes". Communications in Statistics-Theory and Methods 21, 2083-2105.
10. Lam, Y. and Chan, S.K.(1998)," Statistical Inference for Geometric Processes with Lognormal Distribution". Computational Statistics and Data Analysis 27, 99-112.
11. *Nachar, N.(2008)," The Mann-Whitney U:A Test for Assessing Whether Two Independent Samples Come from the Same Distribution". Tutorials in Quantitative Methods for Psychology 4(1), 13-20.*
12. *Parzen, E.(1962)," Stochastic Processes". Holden-Day, Inc.USA.*
13. *Spiegel, M. R., Schille, J. and Srinivasan, R. A. (2001)," Schaum's Easy Out Lines: Probability and Statistic". The McGraw-Hill Companies, Inc. USA*

ملحق: توقفات معمل الكسارة لصناعة سمنت الشمالية خلال الفترة الزمنية

من تاريخ 2010/1/1 ولغاية 2011/12/31

الفترة	عدد أيام التوقف	الفترة	عدد أيام التوقف	الفترة	عدد أيام التوقف
1	2	35	1	69	2
2	6	36	1	70	1
3	1	37	1	71	1
4	64	38	1	72	1
5	1	39	1	73	1
6	1	40	1	74	3
7	6	41	1	75	1
8	31	42	1	76	4
9	4	43	1	77	2
10	2	44	3	78	7
11	2	45	2	79	1
12	85	46	2	80	1
13	3	47	2	81	2
14	3	48	1	82	1
15	2	49	1	83	8
16	1	50	1	84	1
17	1	51	2	85	1
18	3	52	3	86	3
19	4	53	2	87	6
20	1	54	3	88	6
21	1	55	1	89	8
22	1	56	4	90	1

23	2	57	1	91	6
24	1	58	1	92	2
25	1	59	1	93	2
26	5	60	2	94	1
27	1	61	1	95	3
28	2	62	19	96	3
29	1	63	1		
30	1	64	1		
31	1	65	2		
32	6	66	1		
33	1	67	2		
34	1	68	4		