

تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية: دراسة مقارنة مع التطبيق

عمر رمزي جاسم**

د. مثنى صبحي سليمان*

المستخلص

تم في هذا البحث الوقوف على اهم طرائق تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية، اذ تم استخدام طريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم المعدلة بوصفها من الطرائق الامعلمية في التقدير، في حين تم استخدام طريقة الامكان الاعظم بوصفها طريقة معلمية، وعلى اساس ان التوزيع الاحتمالي للتوقف الاول هو توزيع اللوغاريتم الطبيعي. وتمت المقارنة بين هذه الطرائق بالاعتماد على معايير المقارنة المقترحة في البحث، فضلا عن مقارنة العملية الهندسية مع عملية التجديد. وفي الجانب التطبيقي للبحث تمت دراسة الاعطال الحاصلة في الفرن التابع للشركة العامة للسمنت الشمالية واختبار فيما اذا كانت البيانات تتبع العملية الهندسية ام لا، فضلا عن تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية لأعطال الفرن ومقارنتها مع عملية التجديد.

الكلمات الدالة: العملية الهندسية، العزوم المعدلة، المربعات الصغرى، الامكان الاعظم، معمل السمنت.

Estimate The Parameters of The Geometric Process: A Comparison Study with Application

Abstract

This research deals with the most important methods of estimating parameters of the Geometric Process(GP). We use the least squares and the modified moment method, as nonparametric methods, and the maximum likelihood method as a parametric method with the lognormal distribution as the probability distribution for the first stop. To compare these methods we use a criteria proposed in this research, as well as comparing(GP) with the renewal process(RP). As a part of applied research we test whether the data which represent the occurring stops in

Keyword: geometric process, modified moment, least squares, maximum likelihood, Cement factory.

* مدرس/ قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل.

** باحث / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل.

the oven of the General Company of Northern Cement follow the (GP) or not, as well as estimating the parameters of the (GP) of stops and comparing them.

(1) المقدمة:

تعد العمليات التصادفية من العلوم التي لها أهمية خاصة في العديد من المجالات الحيوية والتي توسعت وتشعبت تطبيقاتها في شتى المجالات الطبية والحياتية والفيزيائية والتقنية والاقتصادية، حتى أضحت من أكثر النظريات استخداماً في مجالات الحياة المختلفة. [محمود، 2012]

لقد عُمِّم مفهوم العملية التصادفية لكي يشمل أية ظاهرة يتغير حدوثها بتغير الزمن (سواء أكان حتمياً أم احتمالياً) والقابل للتحليل من ناحية الاحتمالية. وفي الرياضيات، خصوصاً في نظرية الاحتمال *Probability Theory*، فإن العمليات التصادفية تعدّ من المجالات الواسعة التي شهدت وتشهد إقبالاً بحثياً متزايداً كونها تمثل الجانب الحركي من نظرية الاحتمال. [ذنون، 2011]

(2) العملية الهندسية: *Geometric Process (GP)*

تعد العملية الهندسية *Geometric Process (GP)* إحدى التطبيقات المهمة للعملية التصادفية، إذ أنها تعد تعميماً لعملية التجديد *Renewal Process (RP)*، وهي عملية رتيبة وبسيطة *Simple Monotone Processes*، وتعود الفكرة الأولى للعملية الهندسية إلى الباحث [Lam, 1988]، إذ إنه يُعد أول من قدم هذه العملية ودرس خصائصها ومميزاتها وبشيء من التفصيل، وهنالك العديد من الدراسات والبحوث الحديثة التي قامت بتطوير العملية الهندسية وتحسينها نظرياً وتطبيقياً من قبل العديد من الباحثين. [Lam and Zheng, 2003]

إن يكون شكل الدالة التوزيعية (التراكمية) *Cumulative Distribution Function* للعملية التصادفية الهندسية $\{X_i\}$ بالصيغة الآتية:

$$F_i(x) = F(a^{i-1}x) \quad \forall \quad i=1,2,\dots \quad \dots(1)$$

وباشتقاق المعادلة (1) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function* للعملية التصادفية الهندسية $\{X_i\}$ وتكون بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x} = f_i(x) = a^{i-1} f(a^{i-1}x). \quad \dots(2)$$

إذ أن $(a^{i-1}X_i)$ تمثل عملية تجديد، وهي متتابعة من المتغيرات العشوائية غير السالبة المستقلة والمتماثلة التوزيع *Independent and Identically Distributed* مع متوسط μ الذي يشير إلى المستوى الأولي للعملية الهندسية ويقاس اتجاهها [Lam, 1992].

(3) نسبة العملية الهندسية: *Ratio of Geometric Process*

تُعد العملية التصادفية $\{X_i, i=1,2,\dots\}$ ذات المتغيرات العشوائية غير السالبة عملية هندسية *GP* إذا كانت هنالك قيمة مثل a بحيث تمثل قيمة حقيقية وأكبر من الصفر ($a > 0$) يطلق عليها بنسبة العملية الهندسية *Ratio of (GP)*. وتقاس هذه النسبة الاتجاه وقوة الاتجاه للعملية الهندسية، كما أنها تحدد شكل العملية التصادفية، فإذا كانت قيمة نسبة العملية الهندسية أقل من الواحد فإن العملية ستكون متزايدة عشوائياً، أما إذا كانت قيمة نسبة العملية أكبر من الواحد فإنها ستكون متناقصة عشوائياً، وإذا كانت النسبة تساوي الواحد فإن العملية الهندسية تكون عملية تجديد (*RP*)، أي ان عملية التجديد هي حالة خاصة من العملية الهندسية [Lam,1992].

(4) معلمات العملية الهندسية: *Parameters of the Geometric Process*

إذا كانت العملية التصادفية $\{X_i, i=1,2,\dots\}$ عملية هندسية بالنسبة a بحيث أن:

$$X_i = \frac{Y_i}{a^{i-1}} \quad \dots(3)$$

إذاً Y_i تمثل أول وقت فشل.

فان:

$$Y_i = a^{i-1} X_i \quad \dots(4)$$

وتمثل متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع (*i.i.d*).

إن توقع X_i يكون بالصيغة الآتية:

$$E[X_i] = \frac{E[Y_i]}{a^{i-1}} \quad \dots(5)$$

وبما أن $E[Y_i] = \mu$ فإن:

$$E[X_i] = \frac{\mu}{a^{i-1}} \quad \dots(6)$$

وأما تباين X_i فيكون بالصيغة الآتية:

$$Var[X_i] = Var\left[\frac{Y_i}{a^{i-1}}\right] = \frac{Var[Y_i]}{(a^{i-1})^2} = \frac{Var[Y_i]}{a^{2(i-1)}} \quad \dots(7)$$

إذاً إن $Var[Y_i] = \sigma^2$ وعليه فإن:

$$\text{Var}[X_i] = \frac{\sigma^2}{a^{2(i-1)}} \dots (8)$$

مما تقدم نلاحظ أن a و μ و σ^2 تمثل معلمات مهمة للعملية الهندسية، وذلك كون معرفة تلك المعلمات يؤدي إلى معرفة كل من توقع العملية الهندسية وتباينها فضلاً عن اتجاه العملية. [Chan et al., 2006]

(5) الاتجاه العام للعملية الهندسية: *General Trend of Geometric Process*

إن تحليل الاتجاه العام للعملية الهندسية يُعد مهماً في تحديد الشكل العام للعملية الهندسية، فعند تطبيق العملية الهندسية على بيانات حقيقية نواجه عدة مشاكل أساسية أهمها مدى ملائمة بيانات الدراسة مع العملية التصادفية الهندسية، واختبار ذلك فقد اقترح الباحث [Lam,1992] بعض الاختبارات التي تساعدنا على معرفة فيما إذا كانت البيانات تتبع العملية الهندسية أم لا. [Chan et al., 2006]

الخطوة الأولى: اختبار فيما إذا كان هناك اتجاه رتيب للبيانات، ولإجراء ذلك هنالك العديد من التقنيات التي ناقشها الباحثون [Cox and Lewis,1966] منها :

(5-1) تقنية الرسم: *Graphical Technique*

تعد تقنية الرسم من التقنيات الحدسية البسيطة لاكتشاف الاتجاه العام للبيانات، وتعتمد على رسم العدد المتراكم للحوادث التي ظهرت مع الزمن التراكمي، ومن الشكل يمكن الوصول إلى تصور عن طبيعة الاتجاه العام للبيانات سواء كان الاتجاه متزايداً أم متناقصاً أم انعدام الاتجاه. [Cox and Lewis,1966]

(5-2) اختبار المعدل الزمني للحدوث (اختبار لابلاس):

Rate of Occurrence Test(Laplace test)

يمكن استخدام المختبر الإحصائي (U) لاختبار الاتجاه العام للبيانات، ولإجراء الاختبار يتم تحديد كل من فرضية العدم والفرضية البديلة وكالاتي: [Cox and Lewis,1966]

H_0 : يوجد اتجاه ثابت في البيانات (اي عملية تجديد)

H_1 : لا يوجد اتجاه ثابت في البيانات (اي اتجاه رتيب)

والمختبر الإحصائي لهذه الفرضية يكون في الشكل الآتي [Lam,1992] :

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1} - \frac{X_n}{2} \dots (9)$$

$$X_n \sqrt{\frac{1}{12(n-1)}}$$

$$U \sim N(0,1)$$

إذ أن:

من صيغة المختبر لوحظ أنه يُقارن معدل زمن الحدوث ($\bar{X} = \sum_{i=1}^{n-1} X_i / (n-1)$) مع النقطة الوسطية (المركز) للفترة الزمنية $[0, X_n]$ ، أي مع النقطة $(X_n/2)$ ، وعليه عندما:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1} \cong \frac{X_n}{2}$$

فإن المختبر الإحصائي U لا يمكنه التقاط الاتجاه للعملية ، في حين إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي U أكبر من الصفر (موجبة) فذلك يعطي مؤشراً إلى أن الحادثة تقع فوق مركز الفترة الزمنية $[0, X_n]$ ، أي إن المعدل الزمني للحدوث يزداد مع الزمن. أما إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي U أقل من الصفر (سالبة) فذلك يعطي مؤشراً إلى أن الحادثة تقع تحت مركز الفترة الزمنية $[0, X_n]$ ، أي إن المعدل الزمني للحدوث يتناقص مع الزمن. يمكن تحديد قيمة P على النحو الآتي:

$$P(|Z| \geq U) \quad \dots(10)$$

وعليه إذا كانت قيم P أقل من 0.05 فيتم رفض فرضية العدم، أما إذا كانت قيمة P أكبر من 0.05 فيتم قبول فرضية العدم.

والخطوة الثانية: يتم اختبار فيما إذا كانت مجموعة البيانات تتبع العملية الهندسية أم لا، ولإجراء ذلك يتم استخدام الاختبارين اللذين اقترحهما الباحث [Lam, 2007] لاختبار الفرضية الآتية:

H_0 : البيانات تتبع العملية الهندسية:

H_1 : البيانات لا تتبع العملية الهندسية:

اذ نحتاج الى المتتاليتان الآتيتين في حالة كون عدد المشاهدات التي لدينا زوجيا:

$$U_i = X_{2i}/X_{2i-1} \quad ; \quad V_i = X_i X_{2m+1-i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(11)$$

وان : $m = n/2$

في حين نحتاج الى المتتاليتان الآتيتين في حالة كون عدد المشاهدات التي لدينا فرديا:

$$U_i = X_{2i}/X_{2i-1} \quad ; \quad V_i = X_{i+1} X_{2m+2-i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(12)$$

وان : $m = (n-1)/2$

Test of Sign Difference

1- اختبار اختلاف الإشارة:

ويتم حسب الصيغة الآتية: [Lam, 2007]

$$D(W) = \left[D_W - \frac{m-1}{2} \right] / \left[\frac{m+1}{12} \right]^{1/2} \quad \dots(13)$$

$$D_W = \sum_{i=2}^m I_W \quad \text{إذ أن:}$$

وإن I_W هو مؤشر للحدث W وأن:

$$I_W = \begin{cases} 1, & W > 0 \\ 0, & W \leq 0 \end{cases} \quad \text{وإن: } W = (W_i - W_{i-1})$$

The Turning Point Test

2 - اختبار نقطة التحول:

وحسب الصيغة الآتية: [Lam, 2007]

$$T(W) = \left[T_W - \frac{2(m-2)}{3} \right] / \left[\frac{16m-29}{90} \right]^{1/2} \quad \dots(14)$$

$$T_W = \sum_{i=2}^{m-1} I_W \quad \text{إذ أن:}$$

وإن I_W هو مؤشر للحدث W :

$$I_W = \begin{cases} 1, & W < 0 \\ 0, & W \geq 0 \end{cases}, \quad W = (W_i - W_{i-1})(W_{i+1} - W_i)$$

إذ أن $D(W)$ و $T(W)$ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وتباين واحد. وباستبدال كل من W_i مع U_i و V_i نحصل على $T(U), D(U)$ و $T(V), D(V)$.

ومن المعلومات السابقة يمكن تحديد قيم P على النحو الآتي:

$$P_D^U = P(|Z| \geq D(U)) \quad ; \quad P_D^V = P(|Z| \geq D(V)) \quad \dots(15)$$

$$P_T^U = P(|Z| \geq T(U)) \quad ; \quad P_T^V = P(|Z| \geq T(V))$$

وعليه إذا كانت قيم P صغيرة أقل من 0.05، فنرفض فرضية العدم، وبذلك فإن مجموعة البيانات المدروسة في هذه الحالة لا تتبع العملية الهندسية. أما إذا كانت جميع قيم P كبيرة أكبر من 0.05، فنقبل فرضية العدم أي أن مجموعة البيانات المدروسة في هذه الحالة سوف تتبع العملية الهندسية.

[Lam, 2007]

(6) الطرائق اللامعلمية والمعلمية في تقدير معلمات العملية الهندسية:

Non-Parametric and Parametric Methods for Estimating GP Parameters

Non-Parametric

(1-6) الطرائق اللامعلمية:

Methods تُعد الطرائق اللامعلمية في التقدير الإحصائي من الطرائق التي تلاقي اهتماماً واسعاً خاصاً في الوقت الحاضر، وذلك كونها لا تعتمد على توزيعات احتمالية جاهزة وإنما تعتمد على البيانات، لذلك تمت دراسة التقدير اللامعلمي لمعاملات العملية التصادفية الهندسية باستخدام عدة طرائق للتقدير. ونوضح في ادناه الطرائق المستخدمة: [Lam, 1992].

Least squares method

أولاً: طريقة المربعات الصغرى:

إن طريقة المربعات الصغرى من الطرائق اللامعلمية المهمة في تقدير معاملات العملية التصادفية الهندسية والأكثر شيوعاً، إذ إن مبدأ هذه الطريقة يعتمد على تقليل مجموع مربعات الخطأ *Sum of squares error* للحصول على أفضل مقدر للمعاملات a و μ و σ^2 . فإذا كانت العملية التصادفية $\{X_i, i=1,2,\dots\}$ عملية هندسية بالنسبة a ، وبوقت فشل حسب الصيغة الآتية: [Lam et al., 2003].

$$Y_i = a^{i-1} X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (16)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين تم الحصول على:

$$\ln Y_i = (i-1) \ln a + \ln X_i$$

وعليه فإن:

$$\ln X_i = \ln Y_i - (i-1) \ln a \quad \dots (17)$$

وبما إن Y_i عبارة عن متغير عشوائي مستقل ومتماثل التوزيع، عليه يمكن تشبيه المعادلة (17) بنموذج الانحدار الخطي البسيط (*Simple linear regression model*) وبالشكل الآتي: [Chan et al., 2004].

$$\ln Y_i = \lambda + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (18)$$

إذ أن:

$$E[\ln Y_i] = \lambda$$

وكذلك:

$$\text{var}(\ln Y_i) = \text{var}(e_i) = \tau^2$$

ومن خلال دمج المعادلة (17) مع المعادلة (18) نحصل على:

$$\ln X_i = (\lambda + e_i) - (i-1) \ln a \quad \dots (19)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (19) نحصل على:

$$\ln X_i = (\lambda + \ln a) - i \ln a + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (20)$$

ان مجموع مربعات الخطأ تكون في الشكل الآتي:

$$SSE = \sum_{i=1}^n [\ln Y_i - E[\ln Y_i]]^2 \quad \dots (21)$$

وبالتعويض عن قيمة $\ln y_i$ نحصل على:

$$SSE = \sum_{i=1}^n [\ln X_i + (i-1) \ln a - \lambda]^2 \quad \dots (22)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة (22) بالنسبة للمعلمتين λ و $\ln a$ على التوالي ومساواتهما بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \ln a} = 2 \sum_{i=1}^n [\ln X_i + (i-1) \ln a - \lambda](i-1) = 0 \quad \dots (23)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \lambda} = -2 \sum_{i=1}^n [\ln X_i + (i-1) \ln a - \lambda] = 0 \quad \dots (24)$$

وبتبسيط المعادلة (23) نحصل على:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \ln a} = \sum_{i=1}^n (i-1) \ln X_i + \ln a \sum_{i=1}^n (i-1)^2 - \lambda \sum_{i=1}^n (i-1) \quad \dots (25)$$

وبما أن:

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots (26)$$

$$\sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \dots (27)$$

عليه فان مقدار $\ln a$ يكون بالشكل الآتية:

$$\ln a_{NP} = \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i \quad \dots (28)$$

عليه فان المقدّر اللامعلمي للمعلمة a هو:

$$\hat{a}_{NP} = \exp(\ln a_{NP}) \quad \dots (29)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (24) وتبسيطها نحصل على:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \lambda} = - \sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln a \sum_{i=1}^n (i-1) + n\lambda = 0$$

عليه فإن:

$$\lambda = \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln X_i + \ln a \sum_{i=1}^n (i-1)] \quad \dots (30)$$

وبتعويز المعادلة (26) والمعادلة (28) في المعادلة (30) نحصل على :

$$\lambda = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln X_i + \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i * \frac{n(n-1)}{2} \right]$$

$$\lambda = \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n \ln X_i + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i \right]$$

$$\hat{\lambda}_{NP} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (2n-3i+2) \ln X_i \quad \dots (31) \quad \text{عليه فإن:}$$

ولتقدير المعلمة μ ، فمن المعادلة (18) نحصل على:

$$Y_i = e^{\lambda + e_i} \quad \dots (32)$$

وبأخذ التوقع للطرفين نحصل على:

$$E[Y_i] = E[e^{\lambda + e_i}] = e^{\lambda} E[e^{e_i}] \quad \dots (33)$$

$$E[e_i] = 0, \quad E[e_i^2] = \tau^2 \quad \text{وبما أن:}$$

وباستخدام متسلسلة تايلر نحصل على:

$$E[Y_i] = e^{\lambda} E \left[1 + e_i + \frac{e_i^2}{2} + \dots \right] \cong e^{\lambda} \left(1 + \frac{\tau^2}{2} \right) \quad \dots (34)$$

و عليه فإن المقدّر اللامعلمي للمعلمة μ هو:

$$\hat{\mu}_{NP} = \exp(\hat{\lambda}_{NP}) \left(1 + \frac{\hat{\tau}_{NP}^2}{2} \right) \quad \dots (35)$$

أما تقدير معلمة التباين σ^2 للعملية الهندسية، فمن المعادلة (18) نحصل على:

$$\ln(a^{i-1} X_i) = \lambda + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (36)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على النموذج الآتي:

$$\ln X_i = \lambda - (i - 1) \ln a + e_i \quad \dots (37)$$

وبتشبيه النموذج أعلاه بنموذج الانحدار الخطي الآتي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \quad \dots (38)$$

$$y_i = \ln X_i, \quad \beta_0 = \lambda, \quad \beta_1 = -\ln a, \quad x_i = i - 1 \quad \text{إذ أن:}$$

$$\hat{\tau}_{NP}^2 = \frac{SSE}{n-2} \quad \text{كما إن:}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^n \left[\ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln X_i \right]^2 \end{aligned} \quad \text{حيث أن:}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n \left(\ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \left(i - 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i - 1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \left(i - 1 - \frac{n-1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) (n - 2i + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i + \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \left[\sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) = 0 \quad \text{إذ أن:}$$

وعليه فإن:

$$\hat{\tau}_{NP}^2 = \frac{1}{n-2} \left[\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 - \frac{\ln \hat{\alpha}_{NP}}{2} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i \right] \dots (39)$$

وبأخذ التباين لطرفي المعادلة (32) يتم الحصول على المقدّر اللامعلمي لتباين العملية الهندسية وكما يأتي:

$$\text{var}(Y_i) = \text{var}(e^{\lambda + \theta_i}) = e^{2\lambda} \text{var}(e^{\theta_i}) \cong e^{2\lambda} \text{var}(e_i) \cong e^{2\lambda} \tau^2$$

عليه فإن المقدّر اللامعلمي لتباين العملية الهندسية يكون على الشكل الآتي:

$$\hat{\sigma}_{NP}^2 = \exp(2\hat{\lambda}_{NP}) * \hat{\tau}_{NP}^2 \quad \dots (40)$$

Modified Moment Method(MME)**ثانيا: طريقة العزوم المعدلة:**

تعد طريقة العزوم من الطرائق البسيطة في إيجاد التقديرات اللامعلمية لمعاملات العملية التصادفية الهندسية، إذ أنها تعتمد على فكرة مساواة عزوم المجتمع مع عزوم العينة للحصول على تقديرات لمعاملات المجتمع. لقد اقترح الباحث [Lam,1992] هذه الطريقة وأطلق عليها عنوان طريقة العزوم المعدلة (MME). وذلك لكون معلمة نسبة العملية الهندسية (a) يتم تقديرها بطريقة المربعات الصغرى في حين معلمة المعدل والتباين للعملية يتم تقديرها بطريقة العزوم، والصيغ الآتية توضح التقديرات اللامعلمية لمعاملات العملية الهندسية باستخدام طريقة العزوم المعدلة: [Lam and Chan,1998]

$$\hat{a}_{MM} = \exp(\ln \hat{a}_{NP}) \quad \dots(41)$$

$$\hat{\mu}_{MM} = \begin{cases} \bar{\hat{Y}} & , a \neq 1 \\ \bar{X} & , a = 1 \end{cases} \quad \dots(42)$$

$$\hat{\sigma}_{MM}^2 = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2}{(n-1)} & , a \neq 1 \\ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)} & , a = 1 \end{cases} \quad \dots(43)$$

إذ أن:

$$\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1}_{NP} X_i, \quad \bar{\hat{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i}{n}, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Parametric Method**(2-6) الطريقة المعلمية:**

لغرض تقدير معاملات العملية التصادفية الهندسية بطريقة معلمية يتطلب ذلك وضع شرط إضافي على البيانات ألا وهو أن المتغير العشوائي Y_i يتبع احد توزيعات الفشل المعروفة ألا وهي توزيع اللوغاريتم الطبيعي، الاسي، وايبل وكاما. في هذا البحث تم افتراض أن المتغير العشوائي Y_i يتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعي وعلى النحو الآتي [Lam and Chan,1998] :

لتكن لدينا العملية التصادفية الهندسية $\{X_i\}$ وعلى فرض أن (Y_i) يتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعي وذلك بدالة كثافة احتمالية بالشكل الآتي:-

$$f(Y_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2 Y_i}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau^2} (\ln Y_i - \mu)^2\right], & Y_i > 0 \\ 0, & Y_i \leq 0 \end{cases} \quad \dots(44)$$

إذ أن:

$$\lambda = E[Y_i] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\tau^2),$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[Y_i] = \mu^2[\exp(\tau^2) - 1] \quad \dots(45)$$

$$M_k = E[Y_i^k] = \mu^k \exp\{\frac{1}{2}k(k-1)\tau^2\} \quad , k=1,2,\dots$$

لقد تم في هذا البحث استخدام طريقة معلمية واحدة الا وهي طريقة الامكان الاعظم (*Maximum likelihood method (MLE)*) ولغرض تطبيق هذه الطريقة يتم ايجاد دالة الامكان (*Likelihood function*) لتوزيع اللوغاريتم الطبيعي وكما يأتي:

باستخدام التحويل الجاكوبي (*Jacobian transformation*) على المعادلة (44) بعد تعويض المعادلة (4) فيها اذ ان التحويل ينص على :

$$f(X_i) = f(Y_i) * \left| \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \right|_{Y_i=a^{i-1} X_i} \quad \dots(46)$$

وعليه فان:

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}X_i} \exp\left[-\frac{1}{2\tau^2}(\ln(a^{i-1}X_i) - \mu)^2\right] \quad X_i > 0$$

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\tau^2)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n X_i} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} \sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1}X_i) - \mu)^2\right\} \quad \dots(47)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\tau^2) - \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{2\tau^2} \sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1}X_i) - \mu)^2 \quad \dots(48)$$

ولإيجاد مقدر الامكان الاعظم لمعلمة μ يتم اتباع الخطوات الاتية:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$$

$$\mu_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a^{i-1}X_i) \quad \dots(49)$$

ولإيجاد مقدر معلمة نسبة العملية الهندسية يتم اشتقاق المعادلة (48) بالنسبة الى المعلمة (a) ثم مساواتها بالصفر للحصول على مقدر الامكان الاعظم للمعلمة (a) وكالاتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \ln a} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \ln a} = -\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n [\ln(a^{i-1} X_i) - \mu] * (i-1) = 0 \quad \dots (50)$$

$$-\sum_{i=1}^n (i-1) \ln(a^{i-1} X_i) + \mu_L * \sum_{i=1}^n (i-1) = 0$$

وبتعويض المعادلتين (26) و (49) في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$-\sum_{i=1}^n (i-1) \ln(a^{i-1} X_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a^{i-1} X_i) * \frac{n(n-1)}{2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln(a^{i-1} X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1) \{(i-1) \ln a + \ln X_i\} = 0$$

$$\ln a_L = -\frac{\sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i}{\sum_{i=1}^n (i-1)(n-2i+1)} \quad \dots (51)$$

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1) = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n (n-2i+1) i = -\frac{(n-1)n(n+1)}{6} \quad \text{ويمان}$$

$$\therefore \ln a_L = \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i \quad \dots (52)$$

$$\therefore \hat{a}_L = \exp(\ln a_L) \quad \dots (53) \quad \text{علية فان :}$$

وبالرجوع الى المعادلة (49) نحصل على:

$$\hat{\mu}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(i-1) \ln \hat{a}_L + \ln X_i] \quad \dots (54)$$

$$\hat{\mu}_L = \frac{1}{n} \left[\ln \hat{a}_L \sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=1}^n \ln X_i \right] \quad \dots (55)$$

وبتعويض المعادلة (26) والمعادلة (52) في المعادلة (55) نحصل على:

$$\hat{\mu}_L = \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i + \frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right] \quad \dots (56)$$

$$\therefore \hat{\mu}_L = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (2n-3i+2) \ln X_i \quad \dots (57)$$

وللحصول على تقدير للمعلمة (τ^2) نتبع ما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau^2} = 0$$

$$\therefore \tau_L^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(a^{i-1} X_i) - \mu]^2 \quad \dots (58)$$

وللحصول على مقدار الامكان الاعظم لتباين العملية الهندسية نعوض المعادلة (54) في المعادلة (58) نحصل على:

$$\hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (i-1) \ln \hat{a}_L + \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(j-1) \ln \hat{a}_L + \ln X_j] \right\}^2$$

$$\hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln X_i - \frac{1}{n} \ln X_j - \frac{n-2i+1}{2} \ln \hat{a}_L \right\}^2$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n} & \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\ln X_i - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln X_j \right)^2 \right. \\ & - \ln \hat{a}_L \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \left(\ln X_i - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln X_j \right) \\ & \left. + \frac{1}{4} (\ln \hat{a}_L)^2 \sum_{i=1}^n (n-2i+1)^2 \right\} \quad \dots (59) \end{aligned}$$

$$\hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2 - \frac{1}{2} \ln \hat{a}_L \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i \right\} \dots (60)$$

عليه فان مقدار الامكان الاعظم لمعلمات العملية الهندسية في حالة توزيع اللوغاريتم الطبيعي يكون حسب الصيغة الآتية:

$$\hat{\mu}_{MLE} = \exp\left(\hat{\mu}_L + \frac{\hat{t}_L^2}{2}\right) \quad \dots(61)$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \hat{\mu}_{MLE}^2 [\exp(\hat{t}_L^2) - 1] \quad \dots(62)$$

(7) عملية التجديد: *Renewal processes*

بما ان عملية التجديد حالة خاصة من العملية الهندسية، لذلك تم استخدامها لغرض المقارنة بينها وبين العملية الهندسية وذلك لبيان كفاءة المقدرات المقترحة في البحث. إذ أن مقدرات عملية التجديد بطريقة لامعلمية يتم الحصول عليها من المعادلة (42) والمعادلة (43) وذلك عندما ($a=1$)، في حين ان مقدرات لمعلمات عملية التجديد باستخدام طريقة الامكان الاعظم (الطريقة المعلمية) يتم الحصول عليها من خلال التعويض عن قيمة نسبة العملية الهندسية ($a=1$) في المعادلة (55) والمعادلة (60)، وكما موضح أدناه: [Lam and Chan,1998]

$$\hat{\mu}_{L1} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln X_i}{n} \quad \dots(63)$$

$$\hat{t}_{L1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln X_i - \hat{\mu}_{L1}]^2 \quad \dots(64)$$

$$\hat{t}_{L1}^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2}{n} \right\} \quad \dots(65)$$

عليه فان مقدار الامكان الاعظم لمعلمات عملية التجديد في حالة توزيع اللوغاريتم الطبيعي تكون على الشكل الآتي:

$$\hat{\mu}_{MLE1} = \exp\left(\hat{\mu}_{L1} + \frac{\hat{t}_{L1}^2}{2}\right) \quad \dots(66)$$

$$\hat{\sigma}_{MLE1}^2 = \hat{\mu}_{MLE1}^2 (\exp(\hat{t}_{L1}^2) - 1) \quad \dots(67)$$

Goodness of Fit Test

(8) اختيار جودة التوفيق

هنالك العديد من المعايير المستخدمة في اختبار جودة التوفيق، اذ تم في هذا البحث استخدام المعيارين الآتيين للمقارنة :

(1-8) معيار متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error(MSE)

يعد هذا المعيار من اهم المعايير الشائعة الاستخدام في هذا المجال، وذلك لكونه يقيس التركيب العام المناسب فضلا عن ذلك فانه يضم كلا من التباين والتحيز،

ويكون في الصيغة الآتية:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2 \quad \dots(68)$$

حيث ان $\hat{X}_i$ تمثل القيمة المقدرة لمجموعة البيانات $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ ويتم الحصول عليها من خلال المعادلة الآتية:

$$\hat{X}_i = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^{i-1}}$$

(2-8) معيار خطأ النسبة الاعظم Maximum Percentage Error(MPE)

يستخدم لغرض مقارنة جودة التوفيق بين الطرائق المستخدمة لتقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية، فضلا عن ذلك فانه يهتم بالتركيب الفردية لمجموعة البيانات، ويكون في الصيغة الآتية:

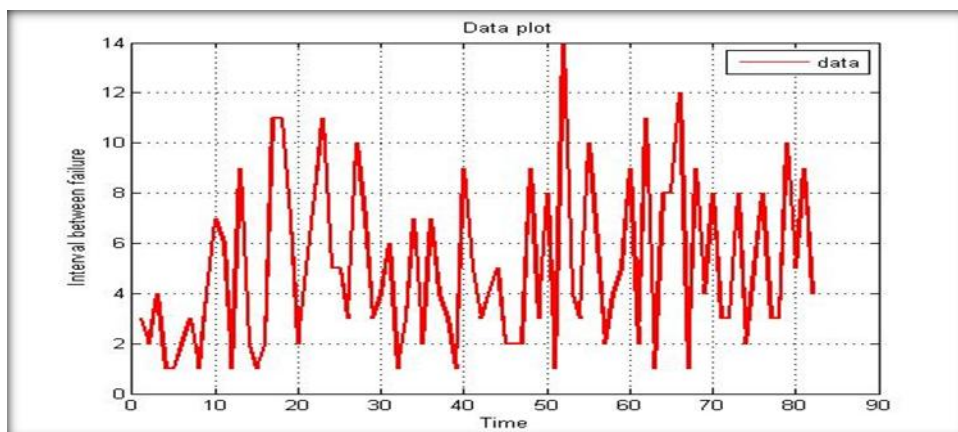
$$MPE = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| S_i - \hat{S}_i \right| / S_i \right\} \quad \dots(69)$$

حيث ان قيمة S_i و $\hat{S}_i$ يتم الحصول عليها وفق الآتي:

$$S_i = \sum_{j=1}^i X_j, \quad \hat{S}_i = \sum_{j=1}^i \hat{X}_j$$

(9) الجانب التطبيقي:

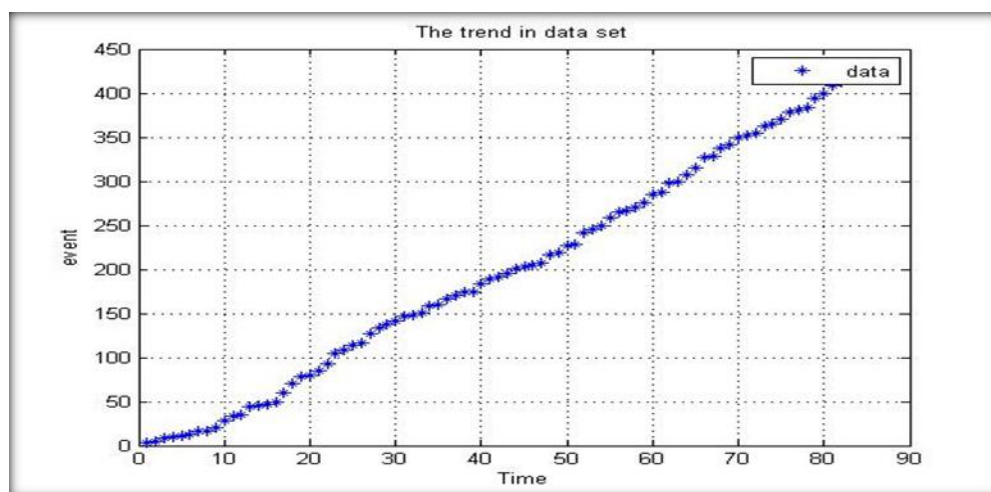
تعد الشركة العامة للسمنت الشمالية ثاني شركة تم تأسيسها لإنتاج السمنت في العراق وأول شركة تقوم بإنتاج السمنت بالطريقة الجافة. وكجانب تطبيقي للبحث تم جمع البيانات من معمل سمنت بادوش التوسيع التابع الى الشركة العامة للإسمنت الشمالية. حيث شملت الاعطال الحاصلة في الفرن التابع للمعمل خلال وجبات العمل اليومية المتكونة من ثلاث وجبات من تاريخ 1/4/2012 ولغاية 5/10/2012 والشكل الآتي يوضح الفترات بين الاعطال مع الزمن.



الشكل (1): بيانات الأعطال الحاصلة في فرن معمل سمنت بادوش التوسيع.

من خلال الشكل (1) تمت ملاحظة ان البيانات تكون متزايدة في فترة معينة ومستقرة وكذلك متناقصة في فترات اخرى، مما يدل على عشوائية الحدوث خلال الفترات قيد الدراسة.

ومن خلال الرسم التراكمي لبيانات اعطال الفرن تم اخذ فكرة عن وجود اتجاه رتيب في البيانات وبشكل متزايد مع الزمن، وكما في الشكل الاتي:



الشكل (2): يمثل الرسم التراكمي لبيانات اعطال الفرن.

في حين ان اختبار لابلاس (2-5) اعطى قيمة ($P_U = 0.2401$) والذي يشير الى عدم معنوية الاختبار، أي قبول فرضية عدم مما يدل على ان هناك اتجاها ثابتا للبيانات. وسبب ظهور هذه النتيجة هو عدم التقاط المختبر الاحصائي للاتجاه الرتيب للبيانات بسبب قرب نسبة العملية الهندسية لواحد.

(1-9) ملائمة البيانات للعملية الهندسية:

إن اختبار ملائمة البيانات للعملية الهندسية يعد أول خطوة في عملية تحليل البيانات، والتي تعد من اهم الخطوات في انجاز التحليل الاحصائي للعملية الهندسية.

ولاختبار فيما اذا كانت البيانات تتبع العملية الهندسية اما لا، نحتاج إلى صياغة الفرضية الآتية:

H_0 : بيانات اعطال الفرن تتبع العملية الهندسية:

...(70)

H_1 : بيانات اعطال الفرن لا تتبع العملية الهندسية:

ولاختبار هذه الفرضية يتم ايجاد قيم P المحسوبة من خلال المعادلات (15)، وكما موضح في الجدول الاتي:

الجدول (1): قيم P لبيانات اعطال الفرن

Is it a geometric process			
P_T^U	P_D^U	P_T^V	P_D^V
0.4473	0.5961	0.2543	0.1096

ومن خلال الجدول (1) نلاحظ أن جميع قيم P لاختبار العملية الهندسية أكبر من 0.05، وعليه نقبل فرضية العدم، القائلة بأن بيانات اعطال الفرن تتبع العملية الهندسية أي ملائمة لها.

(2-9) تقدير معلمات العملية الهندسية:

Estimating the Parameters of the Geometric Process

بعد أن تبين بأن مجموعة بيانات أعطال الفرن لها اتجاه عام فضلا عن انها تتبع العملية الهندسية وملائمة لها، تم تقدير معلمات العملية الهندسية للبيانات اعطال الفرن، كما في الجدول الاتي:

الجدول (2): تقديرات معلمات العملية الهندسية لبيانات اعطال الفرن

Method	Parameters Estimation		
	$\hat{a}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
LSE	0.9930	3.7512	4.6916
MME	0.9930	3.7500	5.7158
MLE	0.9930	3.8425	10.6167

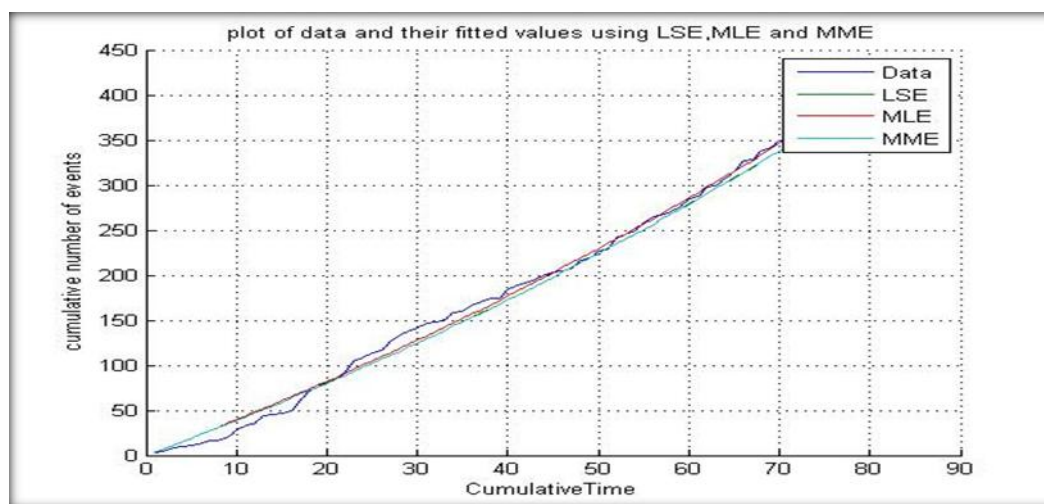
يلاحظ من الجدول أعلاه أن قيمة المعلمة a أقل من الواحد وللطرائق المختلفة كافة ، وهذا يدل على أنها تمثل عملية هندسية متزايدة.

ولغرض المقارنة تم تقدير معلمات عملية التجديد، اذ كما هو معلوم فإن قيمة المعلمة a في عملية التجديد هي دائماً مساوية للواحد لأنها حالة خاصة من العملية الهندسية. والجدول الآتي يوضح مقدرات معلمات عملية التجديد لبيانات اعطال الفرن.

الجدول (3): تقديرات معلمات عملية التجديد لبيانات اعطال الفرن.

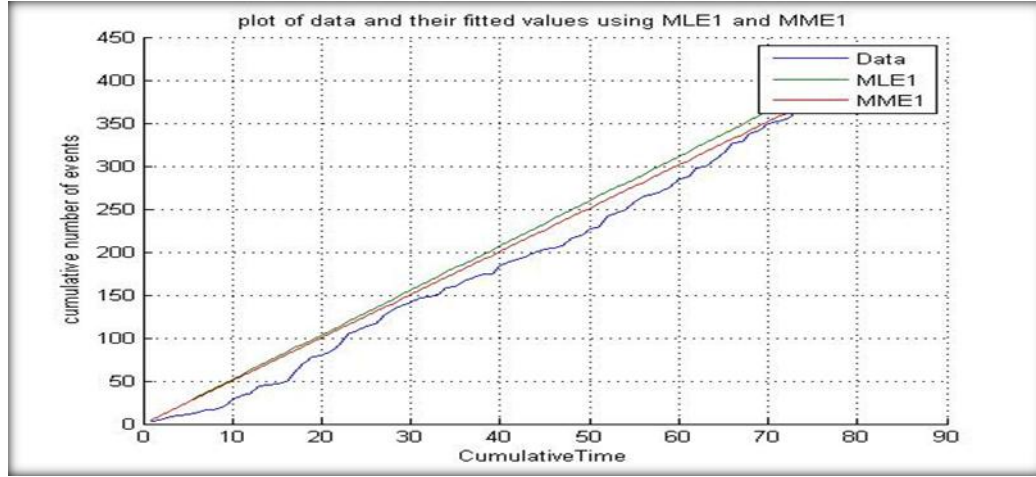
Method	Parameters Estimation	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
MLE1	5.1893	19.8019
MME1	5.0244	10.6167

والشكل الاتي يوضح تقديرات العملية الهندسية لأعطال الفرن باستخدام الطرائق المقترحة للتقدير.



الشكل (3): القيم المقدرة مقارنة مع البيانات الحقيقية للعملية التصادفية الهندسية.

في حين الشكل (4) يوضح تقديرات عملية التجديد لأعطال الفرن باستخدام الطرائق المقترحة للتقدير.



الشكل (4) : القيم المقدرة مع البيانات الحقيقية لعملية التجديد.

وباستخدام معياري الاختبار الموضح في الفقرة (8) تم الحصول على الجدول الآتي:

الجدول (4): قيم MSE و MPE لنموذج العملية الهندسية ونموذج عملية التجديد .

Model	Method	MSE	MPE
Geometric Process	LSE	10.1595	0.8095
	MLE	10.1917	0.8535
	MME	10.1593	0.8089
Renewal Process	MME1	10.4872	1.3644
	MLE1	10.5144	1.4420

(3-9) الاستنتاجات: *Conclusions*

من خلال البحث تم التوصل الى مجموعة من الاستنتاجات يمكن اجمالها بالنقاط الآتية:

- 1- تبين من مقدرات معلمات العملية التصادفية الهندسية ان مقدر نسبة العملية يكون متساويا في الاسلوبين المعلمي واللامعلمي، وكما في الجدول (2).
- 2- من خلال اجراء مقارنة جودة التوفيق لعملية التجديد والعملية الهندسية، تبين بان انموذج العملية الهندسية افضل من انموذج عملية التجديد لبيانات اعطال الفرن.
- 3- باستخدام معايير المقارنة تم التوصل الى ان طريقة العزوم المعدلة افضل طريقة في تقدير معلمات كل من العملية الهندسية وعملية التجديد، تليها طريقة المربعات الصغرى ثم طريقة الامكان الاعظم.
- 4- يلاحظ من خلال الجدول رقم (4) تطابق معياري المقارنة (MSE) و (MPE) في تحديد اهمية كل طريقة من طرائق التقدير.

5- يلاحظ من الشكل (3) مدى تقارب مقدرات العملية الهندسية لأعطال الفرن مقارنة مع القيم الحقيقية، وهذا ما تم تأكيده من خلال معايير المقارنة، فضلاً عن كون مقدّر نسبة العملية الهندسية أقل من واحد أي ان اعطال الفرن متزايدة مع الزمن.

Recommendations (4-9) التوصيات:

- 1- نوصي باعتماد نتائج البحث في معامل السمنت لتتلافى التوقفات الحاصلة فيها، وذلك بأجراء الصيانة الدورية فيها قبل حدوث التوقف.
- 2- نوصي بالاهتمام بصيانة الفرن كون الاعطال متزايدة مع الزمن خلال فترة الدراسة.
- 3- كدراسات مستقبلية نوصي بمقارنة نتائج البحث مع عمليات أخرى مثل عملية النقطة أو العملية البواسونية غير المتجانسة، وذلك لمعرفة أي العمليات أكثر ملاءمة للبيانات.

References المصادر:

- 1- ذنون، باسل يونس، (2011)، " النمذجة الماركوفية مع تطبيقات عملية ". دار ابن الأثير للطباعة والنشر، جامعة الموصل، العراق.
- 2- محمود، شيماء وليد، (2012)، "العملية التصادفية الهندسية وتطبيقاتها في وباء التهاب الكبد الفيروسي" رسالة ماجستير غير منشورة، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل.
- 3- Cox, D.R. and Lewis, P.A. (1966), "*Statistical Analysis of Series of Events*". Chapman and Hall, London, United Kingdom.
- 4- Chan, J. S. K., Yu, P. L. H., Lam, Y. and Ho, A. P. K. (2006), "*Modeling SARS Data Using Threshold Geometric Process*". Statistics in Medicine 25, 1826-1839.
- 5- Chan, J. S. K., Lam, Y. and Leung, D. Y. P. (2004), " *Statistical Inference for Geometric Processes with Gamma Distributions*". Computational Statistics and Data Analysis 47, 565-581
- 6- Lam, Y. (1992), "*Nonparametric Inference for Geometric Processes*". Communications in Statistics Theory and Methods, 21, 2083-2105.
- 7- Lam, Y. and Chan, S. K. (1998), "*Statistical Inference for Geometric Processes with Lognormal Distribution*". Computational Statistics and Data Analysis 27, 99-112.

- 8- Lam, Y. (2007), *"The Geometric Process and its Applications"*. World Sciatic, Singapore.
- 9- Lam, Y., Zheng, Y. H. and Zhang, Y. L. (2003), *"Some Limit Theorems in Geometric Processes"*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 19, 405-416.