المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات-الاحصاء والمعلوماتية
ص ص [147-170]

تنبؤ كرگنك الشامل للعملية العشوائية المكانية غير المستقرة

محمد نذير إسماعيل قاسم* أسماء غانم محمود**

الملخص

العمليات العشوائية المكانية غالبا ما تقسم إلى عمليات عشوائية مكانية مستقرة وأخرى غير مستقرة، وفي معظم التطبيقات العملية عادة تكون العمليات العشوائية غير مستقرة.وعند التنبؤ عن النوع الثاني يكون بواسطة تقنية تعرف بـ كرگنك الشامل Universal Kriging الذي يفترض أن العملية العشوائية المكانية $\{Z(x), x \in D\}$ لها اتجاه في الزيادة أو النقصان محدد بعملية قد تكون خطية أو غير خطية.

في هذا العمل تم اشتقاق معادلات كرگنك الشامل بصيغة المصفوفات ووضع نظام المعادلات الكلية بصيغة تسهل برمجتها،كذلك تم تحديد النموذج الرياضي للاتجاه بواسطة أسلوب الانحدار.تم التطبيق على بيانات حقيقية لمثال وكانت نتائج التنبؤ قريبة من البيانات الحقيقية مع حساب خطأ التنبؤ.

Universal Kriging Prediction of nonstationary Spatial Stochastic Process

Abstract

Spatial Stochastic processes are often divided into two types that are stationary spatial stochastic processes and other nonstationary.

In most practical applications the processes are nonstationary .Prediction of these processes are performed by universal Kriging technique which supposes that the processes have a trend with fixed linear or nonlinear equation.

In this work we derive the universal Kriging equations in matrixes form which can easily be implemented by computer. Also here we identify the variogram model and trend model.

---

* أستاذ مساعد/ قسم الرياضيات/ كلية التربية

** مدرس/ قسم الإحصاء والمعلوماتية/كلية علوم الحاسبات والرياضيات

تاريخ التسلم :2009/7/1 ـــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول : 6 /12 /2009

The application is given in example that worked out on real data. The predicted results are very near to the real data with error of prediction is given

1-1 تنبؤ كرگنك الشامل Universal Kriging Prediction

في معادلات كرگنك كافة المقدّمة في الفصل الثاني، يفترض أن الدالة العشوائية المكانية $Z(x)$ مستقرة Stationary وأن التنبؤ لأي $Z(x_0)$ غير معلوم من بيانات $Z(x_i)$ التـي تمت الإشارة إليها بأنها Ordinary Kriging، أي أنها تنبؤ كرگنك الاعتيادي ولكن في بعض التطبيقات العملية ، وتلقائياً يقسم السطح $Z(x)$ إلى الاتجاه Trend والتذبـذبات العـشوائية Fluctuation فهناك العديد من المواقع تكون معلومة الاتجـاه Drift (أو Trend)، أي أنـه توقع عدم الاستقرارية $E[Z(x)] = \mu(x)$ يكون موجوداً Exists ضمن مساحات من المنطقة قيد الدراسة فعلى سبيل المثال، الزيادة في درجة عمق الذهب في اتجاه مصدره أكثر من أيـة منطقة أخرى، وكذلك الزيادة في عمق النهر أو البحر عند مواقع مختلفة من حافـة النهـر أو البحر واتجاهها إلى مسافات أبعد عن الحافة أو شاطئ البحر.

إن صفة " Universal " أي(شامل)، أول من بدأ باستخدامها G. Matheron عـام 1969 لتشير إلى عدم التحيز في التنبؤ عندما يكون الاتجاه Drift تركيباً خطياً غير معلـوم لدوال معلومة Unknown Linear Combination ، اذ قام بعرض تفاصيل كرگنك الشامل باللغة الفرنسية ثم تبعته ترجمة قصيرة بالانكليزية أنظـر :(Huijbregts and Matheron, 1970) وقد كتب آخرون حول الموضوع نفسه، أنظـر: (Olea,1974) و(Delfiner,1976) و(David,1977) و(Delhomme,1978) و(Davis,1986)و(Isaaks, 1989) و (Stein, 1999) و(Webster, 2001) و (Venables, 2002) و (Diggle ,et al , 2003).

ومازالت البحوث إلى حد الآن تتناول موضوع كرگنك الشامل.

2-1 صيغة الاتجاه:- The Form of the Drift

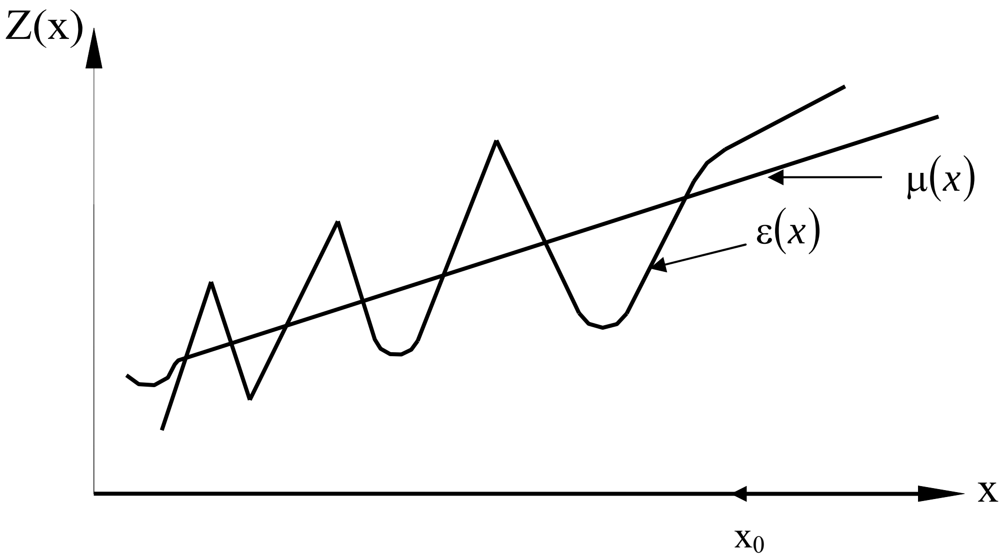
إن طريقة Universal Kriging تعطي تنبؤا خطياً غيـر متحيـز Unbiased Linear Predictor، وتأخذ بنظر الاعتبار الاتجاه أي أن:

$$E[Z(x)] = \mu(x) \qquad \forall \ x \in D \qquad ...(1)$$

بشكل عام $Z(x)$ دالة عشوائية مكانية غير مستقرة في المنطقة قيد الدراسة وبواسطة تعريف الاتجاه من المعادلة (1) فإن نموذج الدالة العشوائية المكانية غير المستقرة $Z(x)$ يمكـن أن يعبر عنه كالآتي:-

$$Z(x) = \mu(x) + \varepsilon(x) \qquad ...(2)$$

الاتجاه $\mu(x)$ والذي يعبر عن الاختلاف المستمر والمنتظم في الدالـة العـشوائية المكانيـة $Z(x)$ عند قياس المشاهدات للبيانات التجريبية، وأن $\varepsilon(x)$ يعبر عن التذبـذبات العـشوائية حول الاتجاه، أنظر الشكل (1).



الشكل (1): الأتجاه $\mu(x)$ والتذبذبات $\varepsilon(x)$.

من الشكل نلاحظ أنه ليس هناك فرق واضح بين $\mu(x)$ الاتجاه و $\varepsilon(x)$ التذبذبات العشوائية. وبصورة عامة فـإن $\mu(x)$ يمكـن اعتبـاره اخـتلاف المقيـاس الكبيـر Large- Scale Variation، واعتـبار التذبذبات العشـوائية $\varepsilon(x)$ عمليـة عشوائية صغـيرة المـقياس Small- Scale Variation Process. أنظـــــــر: (Ripley, 1981)، (Journel and Huijbregts, 1978).

3-1 معادلات كرگنك الشامل:- Universal- Kriging Equations

تم تطوير نظـرية التنـبؤ لـ Winer- Kolomogrov واستخـدمها بـصورة رئيسة G. Matheron ومدرسته في الدراسات الجيولوجية على العمليات المكانيـة، أنظـر (Davis, 2002):، ويكون التناظر مفيداً مع تحليـل السلاسل الزمنية فـي عـزل الاتجـاه Drift، والذي يعتبر هدفاً من أهداف التحليل ، وكذلك في وصف التوزيع للدالـة العـشوائية $\varepsilon(x)$. وهنا تكمن أهمية تحليل المعادلة (2) والتنبؤ بالمكونتين كـل علـى حـدة، انظـر:

(Jurgen Symanzik, 2000). ولغرض صياغة نموذج خطـي عـام General Linear Model في الإحصاء المكاني، انظر : (Papritz, 1999)،

نعتبر العملية العشوائية المكانيـة $Z(x)$ المعـرف فـي منطقـة المنطـق Domain Region-D والتي هي مجموعة جزئية من فضاء أقليـدس R^3, R^2 $\left(D \subset R^2, R^3\right)$ كالآتي:-

$$Z(x) = f'(x)B + \varepsilon(x) \ , \quad \forall \quad x \in D \qquad ...(3)$$

إذ إن:-

x : تمثل الموقع في R^2 أو R^3 .

$Z(x)$: عملية عشوائية مكانية.

$f(x) = [f_1(x), f_2(x), ... f_n(x)]'$:متجه معلوم من الاحداثيات.

β : متجه بسعة r من المعلمات المجهولة.

$\varepsilon(x)$:متجه عشوائي بتوقع صفر وتباين موجود Exists.

الحد $f'(x)\beta$ في المعادلة (3) يمثل توقع العملية العـشوائية المكانيـة ونقـصد بالعمليـة العشوائية المكانية هنا هي تلك الظاهرة قيد الدراسة كما بينا سابقاً، كالتنقيب عن المعـادن أو المياه الجوفية ....الخ من الدراسات الجيولوجية.

إن العملية العشوائية المكانية $Z(x)$ تحقق الفرضيات الآتية:-

<u>الفرضية (1)</u>:-

$$E[Z(x)] = f'(x)\beta \qquad ...(4)$$

<u>الفرضية (2)</u>:-

$$E[Z(x+h) - Z(x)]^2 = 2\gamma(h) \qquad \forall \quad x, x+h \in D \qquad ...(5)$$

ويكون $2\gamma(h)$ احادي الخواص Isotropic أي يعتمد فقط على المسافة h.

<u>الفرضية (3)</u>:-

دالة التغاير موجودة ومعرفة كالآتي:-

$$Cov[Z(x), Z(x+h)] = C(h) \qquad \forall \ x, x+h \in D \qquad ...(6)$$

نفترض أن لدينا n من المشاهدات المعلومة هي:

$$Z(x_1), Z(x_2), ...Z(x_n)$$

عند المواقع

$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

عندئذٍ يمكن كتابة النموذج (3) بلغة المصفوفات و كالآتي:-

$$Z = F\beta + \varepsilon \qquad \ldots(7)$$

إذ إن:-

$Z = [Z(x_1), \ldots\ldots\ldots Z(x_n)]'$: متجه بسعة n من المشاهدات.

$F = [f(x_1), \ldots\ldots\ldots F(x_n)]$: مصفوفة معلومة بسعة $(n \times r)$.

$\beta = [\beta_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \beta_r]'$: متجه بسعة r من المعلمات المجهولة.

$\varepsilon = [\varepsilon(x_1), \ldots\ldots\ldots \varepsilon(x_n)]'$: متجه الأخطاء العشوائية بسعة n.

ولغرض تمهيد Smoothing السطح المتنبأ به نستخدم المعادلة الاتية:

$$\tilde{Z}(x) = \hat{\mu}(x) \qquad ..(8)$$

ولغرض التنبؤ بموقع جديد x_0 داخل المنطقة قيد الدراسة (الفضاء D) والتي تدعى بـ Interpolation نستخدم المعادلة الآتية:-

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{\varepsilon}(x) \qquad \ldots(9)$$

ولدراسة التنبؤ الشامل Universal Kriging لابد من تقسيم هذه الفقرة على ثلاثة محاور, المحور الأول يتناول تقدير الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ فقط مع افتراض تباين العملية العشوائية المكانية $\varepsilon(x)$ معلوم Known. إن معرفة التباين تكون حرجة في كثير من الدراسات العملية والتي يكون فيها التباين غير معلوم Unknown، وعليه يتناول المحور الثاني معلومية الاتجاه $\mu(x)$ وعدم معلومية $\varepsilon(x)$ ، فنقوم بتقدير التباين. أما المحور الثالث فيتناول عدم معرفة الاتجاه $\mu(x)$ و $\varepsilon(x)$ معاً، حيث نقوم بالوقت نفسه بتقدير الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ والتباين $\hat{\varepsilon}(x)$، انظر : (Cressie, 1993)، (Papritz, 1999).

وهكذا سنتناول هذه المحاور بالتفصيل وكما يأتي:-

4-1 تقدير الاتجاه:- Estimation of Trend

في حالة أن الاتجاه $\mu(x)$ يكون غير معلوم Unknown نفترض أن $\varepsilon(x)$ معلوم ، وهذا يعني:-

$$\left.\begin{aligned} Var[Z] &= Var[\varepsilon] = \Sigma \\ Cov[Z, Z_i] &= C(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(10)$$

وحسب الفرضية (1) لدينا:

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x)B \qquad \ldots(11)$$

حيث $f(x)$ معلومة ولا تحتوي على معلمات مجهولة ، فمثلاً عندما يكون سـطح الاتجـاه خطياً Linear Trend Surface فإن $f(x)$ تكون كالآتي:

$$f(x)=(1\ ,\ u,\ v)$$

وعندما يكون سطح الاتجاه تربيعياً Quadratic Surface فإن $f(x)$ تكون كالآتي:

$$f(x)=(1\ ,\ u,\ v,\ u^2\ ,v^2\ ,uv)$$

ولتقدير $\hat{\mu}(x)$ ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى العامة Generalized least Squares نحصل على تقدير معلمات النموذج المكاني الخطي العام، فإذا كان النموذج المفتـرض فـي المعادلة (7) هو:-

$$Z=F\,\beta+\varepsilon$$

فإن مجموع مربعات الخطأ يكون كالآتي:-

$$(Z-F\,\beta)'\sum{}^{-1}(Z-F\beta) \qquad ...(12)$$

أنظر : (Wackernagel, 1998)

ولإيجاد تقدير لقيم β التي تجعل (12) أقل ما يمكن،نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـ β ثـم نجعلها تساوي صفراً فنحصل على $\hat{\beta}$ التقديرية:-

$$\hat{\beta}=AF'\Sigma^{-1}Z \qquad ...(13)$$

إذ أن:-

$$A=(F'\sum{}^{-1}F)^{-1}$$

وهذا التقدير هو أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) ولغرض الحـصول علـى $\hat{\mu}(x)$ ،المقدّرة وكالآتي:-

$$\hat{\mu}(x)=f'(x)\hat{\beta} \qquad ...(14)$$

نعوض (13) في (14) نحصل على:-

$$\hat{\mu}(x)=f'(x)AF'\Sigma^{-1}Z \qquad ...(15)$$

الآن نفترض المتنبأ الخطي الآتي:-

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mu}(x)&=\ell_1'Z\\ \hat{\mu}(x)&=Z'\ell_1\end{aligned}\right\} \qquad ...(16)$$

إذ إن:-

$$\ell_1 = \sum^{-1} FAf(x) \qquad ...(17)$$

حيث:- ℓ_1: متجه بسعة n يمثل الأوزان المرافقة للمشاهدات المكانية $Z(x_i)$ وهذه الأوزان تناظر λ في تنبؤ كركنك الاعتيادي أنظر (محمود،2006).

لاحظ أن مصفوفة التغاير لـ $\hat{\beta}$ هي:-

$$Var(\hat{\beta}) = A \qquad ...(18)$$

*

وأن تباين $\hat{\mu}(x)$

$$Var(\hat{\mu}(x)) = f'(x) Var(\hat{\beta}) f(x)$$

$$= f'(x) A f(x) \qquad ...(19)$$

*

5-1 التنبؤ الخطي مع اتجاه معلوم:- Linear Prediction with Known Trend

نفترض **أن** الاتجاه $\mu(x)$ معلوم للعملية العشوائية المكانية وأن $\varepsilon(x)$ غير معلومة في المعادلة (2)

وللسهولة ولكي نقدر $\varepsilon(x)$ نفترض أن:-

$$\varepsilon(x) = w(x)$$

إذن سيكون:-

$$w(x) = Z(x) - \mu(x) \qquad ...(20)$$

نحاول تقدير $w(x)$ وذلك بافتراض المتنبأ الخطي الآتي:-

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{2i} w(x_i) \qquad ...(21)$$

وبلغة المصفوفات:-

$$\left.\begin{array}{l} \hat{w}(x) = \ell'_2 w(x) \\ \hat{w}(x) = w'(x) \ell_2 \end{array}\right\} \qquad ...(22)$$

إذ إن:-

$$w(x) = [w(x_1), w(x_2), ...w(x_n)]'$$

ويمثل متجه الأخطاء العشوائية ذا سعة n.

$$\ell_2 = [\ell_{21}, \ell_{22}, ...\ell_{2n}]'$$

ويمثل متجه الأوزان ذا سعة n.

ولدينا:-

$$var[w(x)] = \sum \quad , \quad Cov[w(x), w] = C(x) \qquad ...(23)$$

المتنبأ في المعادلة (22) هو متنبأ خطي Linear Predictor بأقل متوسـط مربـع خطـأ وكالآتي:-

$$E[w(x) - \hat{w}(x)]^2 = Var[w(x) - \hat{w}(x)]$$

$$= Var[w(x)] + Var[\hat{w}(x)] - 2Cov[w(x), \hat{w}(x)] \qquad ...(24)$$

وبتعويض (22) و (23) في (24) نحصل على:-

$$= Var[w(x)] + Var[\ell'_2 w(x)] - 2Cov[w(x), \ell'_2 w(x)]$$

$$= Var[w(x)] + \ell'_2 \, var[w(x)] \ell_2 - 2Cov\left[w(x), \sum_{i=1}^{n} \ell_{2i} w(x_i)\right] \qquad ...(25)$$

وبتعويض (23) في (25) نحصل على :-

$$= Var[w(x)] + \ell'_2 \sum \ell_2 - 2\sum_{i=1}^{n} \ell_{2i} Cov[w(x), w(x_i)]$$

$$= Var[w(x)] + \ell'_2 \sum \ell_2 - 2\ell'_2 C(x)$$

إذن:

$$E[w(x) - \hat{w}(x)]^2 = C_{00} + \ell'_2 \sum \ell_2 - 2\ell'_2 C(x) \qquad ...(26)$$

الآن نعتبر (26) معادلة ذات صيغة تربيعية، ولغرض تصغيرها نـشتق بالنـسبة لـ ℓ_2 ونساوي المعادلة بالصفر نحصل على:-

$$\sum \ell_2 = \mathrm{C(x)} \qquad ...(27)$$

وبضرب طرفي المعادلة في (27) بـ $\sum^{-1}$ نحصل على:-

$$\ell_2 = \sum^{-1} C(x) \qquad ...(28)$$

حيث إن $\sum$ تمثل مصفوفة التغاير وهي مصفوفة غير أحاديـة Non-Singular ، أكيـدة الايجابية كما هو معلوم.

وبتعويض (28) في (22) يصبح المتنبأ كالآتي:-

$$\hat{w}(x) = w'(x) \sum^{-1} C(x) \qquad ...(29)$$

إن المعادلة (29) تعتبر التنبؤ الأمثل Optimal Prediction لـ $w(x)$ لأنها ذات أقل متوسط مربع خطأ Minimum Mean Square Error.

إن تباين خطأ التقدير للمتنبأ $\hat{w}(x)$ هو:-

$$\sigma_E^2 \hat{w}(x) = min \; E[w(x) - \hat{w}(x)]^2$$

$$= Var[Z(x)] - \ell'_2 C(x) \qquad ...(30)$$

*

6-1 النموذج الكامل :- Full Model

نفترض الآن أن كلا المكونين، الاتجاه $\mu(x)$ والأخطاء العشوائية $\varepsilon(x)$ غير معلومين Unknown في العملية العشوائية المكانية (2)، ولغرض إيجاد المتنبأ الخطي $\hat{Z}(x)$ ، سيكون بواسطة الطريقة المناظرة في عمليات السلاسل الزمنية وهي ربط بين المحورين الأول والثاني لتكوين المتنبأ الخطي الآتي:-

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{w}(x)$$

وهذا يتم بـ :-

(أولاً): توفيق الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ من المعادلة (16) :

$$\hat{\mu}(x) = Z'\ell_1$$

(ثانياً): تكوين المعادلة الآتية:-

$$W = Z - \hat{\mu} \qquad ...(31)$$

ومن الفرضية (1) لدينا:-

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x)\beta$$

وبلغة المصفوفات:

$$E[Z] = \mu = F\beta \qquad ...(32)$$

$$\hat{\mu} = F\hat{\beta} \qquad ...(33)$$

بتعويض $\hat{\beta}$ من المعادلة (13) في (33) نحصل على :-

$$= FAF'\sum{}^{-1} Z$$

$$= Z\sum{}^{-1} FAF' \qquad ...(34)$$

(ثالثاً): التنبؤ بـ $w(x)$ كما لو أن الاتجاه $\mu(x)$ معلوم Known وهذا يعني:

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{2i} w(x_i) \qquad ...(35)$$

وبلغة المصفوفات:

$$\left.\begin{aligned}\hat{w}(x) &= \ell'_2 w \\ &= w'\ell_2\end{aligned}\right\} \quad ...(36)$$

وبتعويض (31) و (28) في (36) نحصل على:

$$\hat{w}(x) = (Z - \hat{\mu})' \sum^{-1} C(x)$$

وبتعويض (33) في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$= \left(Z' - \hat{\beta}'F'\right) \sum^{-1} C(x)$$

وبتعويض عن قيمة $\hat{\beta}$ في المعادلة أعلاه نحصل على:-

$$\hat{w}(x) = Z'\ell_2^*$$

إذن:

$$\hat{w}(x) = \ell_2'^* Z \quad ...(37)$$

إن إن ℓ_2^* سنجد صيغتها لاحقاً.

وللحصول على خواص هذا المتنبأ، لدينا من المعادلة (11) الآتي:-

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x)B$$

نفترض أن $\hat{Z}(x)$ هو متنبأ خطي وكالآتي:-

$$\hat{Z}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{3i} Z(x_i) \quad ...(38)$$

وبلغة المصفوفات:

$$\left.\begin{aligned}\hat{Z}(x) &= \ell'_3 Z \\ \hat{Z}(x) &= Z'\ell_3\end{aligned}\right\} \quad ...(39)$$

$$E\left[\hat{Z}(x)\right] = \ell'_3 E[Z] \quad ...(40)$$

وبتعويض (32) في (40) نحصل على:-

$$E\left[\hat{Z}(x)\right] = \ell'_3 F\beta \quad ...(41)$$

ولكي يكون :

$$E\left[\hat{Z}(x)\right] = \mu(x)$$

أي غير متحيز، فقط إذا:-

$$\ell'_3 F = f'(x) \quad ...(42)$$

أي أن (38) هو متنبأ خطي غير متحيز. عندئذٍ فإن متوسط مربع الخطأ يكون كالآتي:-

$$E\left[Z(x)-\hat{Z}(x)\right]^2 = Var\left[Z(x)-\hat{Z}(x)\right]$$
$$= Var[Z(x)] - 2\ell'_3 C(x) + \ell'_3 \sum \ell_3 \qquad ...(43)$$

ولتقليل (43) وفقاً للقيد(42) تكون دالة لاكرانج كالآتي:-

$$S = Var\left[Z(x)\right] - 2\ell'_3 C(x) + \ell'_3 \sum \ell_3 + 2\left(f'(x) - \ell'_3 F\right)\lambda$$

حيث λ تمثل مضاعف لاكرانج.

نشتق المعادلة أعلاه بالنسبة إلى ℓ_3 ونساوي الناتج بالصفر نحصل على:-

$$\ell_3 = \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F\lambda$$

نعوض ℓ_3 في (42) ينتج:-

$$\lambda = A\left[f(x) - F'\Sigma^{-1} C(x)\right]$$

نعوض λ في ℓ_3 نحصل على:-

$$\ell_3 = \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F\left[A\left(f(x) - F'\Sigma^{-1} C(x)\right)\right]$$

$$= \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F\left[A\, f(x) - AF'\Sigma^{-1} C(x)\right]$$

$$= \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F\, A\, f(x) - \Sigma^{-1} FAF'\Sigma^{-1} C(x)$$

$$= \Sigma^{-1} FA\, f(x) + (I - \Sigma^{-1} FAF')\Sigma^{-1} C(x)$$

$$\ell_3 = \ell_1 + \ell^*_2 \qquad ...(44)$$

إذ إن:-

$$\ell_1 = \Sigma^{-1} FA\ f(x)$$

$$\ell^*_2 = \left(I - \Sigma^{-1} FAF'\right)\Sigma^{-1} C(x)$$

وبتعويض (44) في (39) نحصل على:-

$$\hat{Z}(x) = \left(\ell_1 + \ell^*_2\right)' Z$$

$$\hat{Z}(x) = \ell'_1 Z + \ell^{*\prime}_2 Z$$

إذن إن:

$$\hat{Z}(x)=\hat{\mu}(x)+\hat{w}(x) \qquad ...(45)$$

إن تباين الخطأ للمتنبأ الخطي $\hat{Z}(x)$ يكون كالآتي:-

$$\sigma^2_{E(\hat{Z}(x))}=\left[Var(Z(x))-C'(x)\Sigma^{-1}C(x)\right]+$$

$$\left[f(x)-F'\Sigma^{-1}C(x)\right]' A\left[f(x)-F'\Sigma^{-1}C(x)\right] \qquad ...(46)$$

إن الحد الأول للمعادلة (46) هو $Var(\hat{w}(x))$ المتمثل في المعادلة (30)، ولكن الحـد الثاني هو ليس $Var[\hat{\mu}(x)]=f'(x)Af(x)$ المتمثل في المعادلة(19) حيث تم تعديل قيمة الوسط $\hat{\mu}(x)=f'(x)\hat{\beta}$ إلى $\left[f'(x)-\ell_2{}'F\right]\beta$ ، حيـث $\ell_2{}'$ هـو متجـه الأوزان المستخدم في صياغة $\hat{w}(x)$.

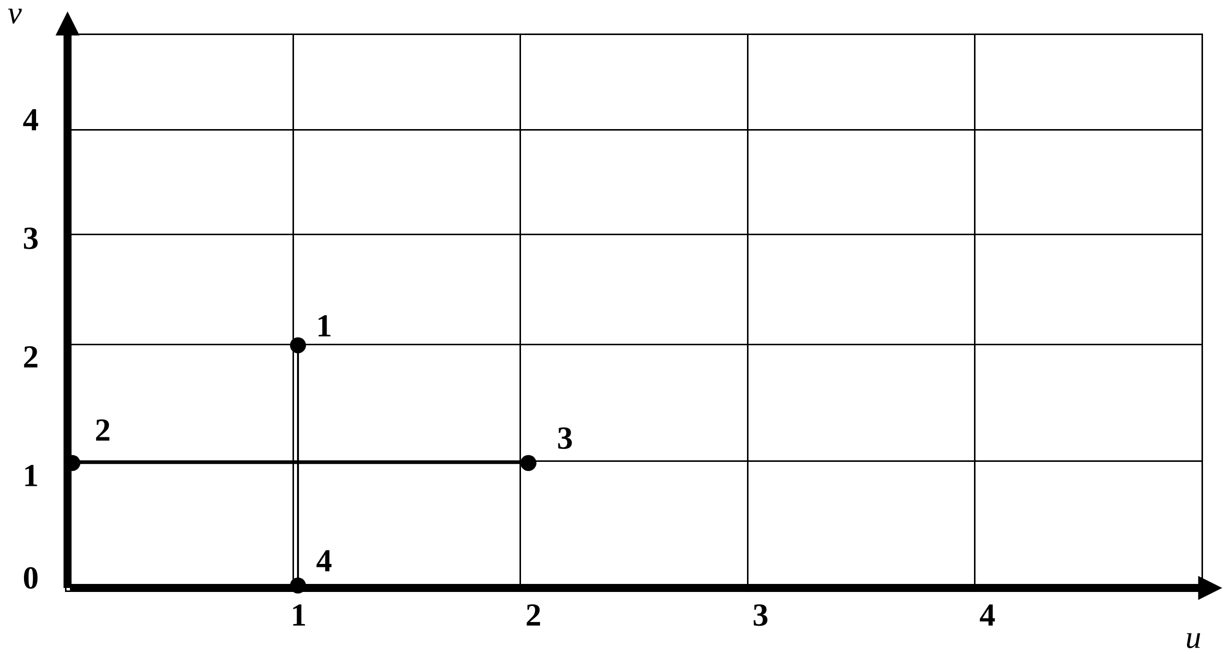
إذا كانت $f(x)$ مجرد ثابت فإن $\hat{Z}(x)$ و $\sigma^2_{E(\hat{Z}(x))}$ هما إجـراء G. Matheron الـذي أطلق عليها اسم Kriging، في هذه الحالة فإن شرط عدم التحيـز يتمثـل بـ ـ أن مجمـوع الاوزان ℓ_{3i} يساوي واحداً وتدعى هذه الحالة العامة بـ " كركنك الشامل" أنظر: (Ripley, 1981).

1-7 مثال تطبيقي

البيانات في الجدول (1) والتي اخذت من الشكل (2) انظـر (Cressie,1993) تمثـل درجات معدن الالمنيوم ومواقعها التي تم الحصول عليها من الصخور Bauxite اثناء الحفـر بانتظام في فضاء معين،حيث قيست وحدات المسافة بين مواقع الحفـر بوحـدة القـدم Feet والمطلوب الحصول على تنبؤات بدرجات معدن الالمنيوم الحقيقية من الصخور باستخدام تنبؤ كركنك الشامل.

الجدول (1) درجات معدن الالمنيوم ومواقعها

	$Z(x_i)$	u	v
1	2.54	1	2
2	2.4	0	1
3	2.25	2	1
4	2.29	1	0



الشكل (2): مواقع معدن الألمنيوم

نفترض الاتجاه Trend له المعادلة الخطية الآتية:

$$\mu(u,v) = \beta_1 + \beta_2 u + \beta_3 v$$

$$f(x) = (1, u, v) = F$$

نفترض أن دالة التغاير تتبع النموذج الآتي:

$$C(h) = \begin{cases} 0.0085(4-h) & if \quad h < 4 \\ 0 & if \quad h > 4 \end{cases}$$

<u>أولا:</u>

يتم تقدير معالم النموذج $\hat{\beta}$ من المعادلة رقم (13).

حيث ان :

$$A = (F'\sum{}^{-1} F)^{-1}$$

$$\therefore \beta = (F'\sum{}^{-1} F)F'\sum{}^{-1} Z$$

حيث يتم ايجاد مصفوفة $\sum$ أي دالة التغاير حسب النموذج المفترض أعلاه وذلك بحساب مصفوفة المسافات $[h]$ من القانون الآتي:

$$h_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$$

فمثلا :

$$h_{11}=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2}=0$$

$$h_{12}=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

وهكذا لبقية عناصر المصفوفة حيث نحصل على المصفوفة الآتية:

$$h=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على مصفوفة التغاير $\sum$ وكالآتي:

$$\sum=0.0085\left[4-\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & 0 & 2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2 & 0 & \sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\right]$$

إذن ناتج مصفوفة $\sum$ يكون كالآتي:

$$\sum=\begin{bmatrix}0.034 & 0.021979 & 0.021979 & 0.017\\ & 0.034 & 0.017 & 0.021979\\ & & 0.034 & 0.021979\\ & & & 0.034\end{bmatrix}$$

ويتم إيجاد مصفوفة $\sum^{-1}$ وتكون كالآتي:

$$\sum^{-1}=\begin{bmatrix}67.548 & -32.87 & -32.87 & 8.724\\ & 67.548 & 8.7241 & -32.87\\ & & 67.548 & -32.87\\ & & & 67.548\end{bmatrix}$$

ثانياً:

يتم تكوين مصفوفة F وحساب F' كالآتي:

$$F=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$F'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ثالثاً:

تكوين مصفوفة Z من البيانات الأصلية وتكون كالآتي:

$$Z = \begin{bmatrix} 2.54 \\ 2.40 \\ 2.25 \\ 2.29 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على تقديرات معالم النموذج $\hat{\mu}(x)$ وهي:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.32 \\ -0.075 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

إذن معادلة الاتجاه المقدر Trend أو $\hat{\mu}(x)$ عند أي موقع ذي اتجاهين تكون كالآتي:

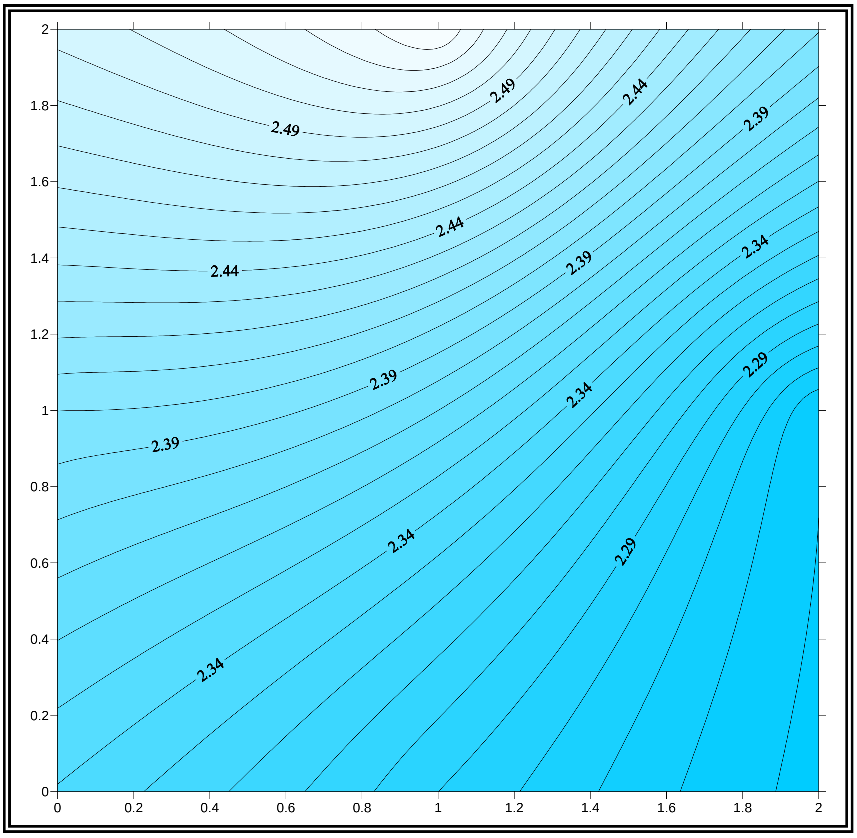
$$\hat{\mu}(u,v) = 2.32 - 0.075\,u + 0.125\,v$$

إذن القـيم المتنبـأ بهـا عنـد المواقـد (1,2)،(0,1)،(2,1)،(1,0) هـي 2.245،2.295،2.445،2.495 وعلى التوالي،وكما موضح في الجدول (2) الآتي:

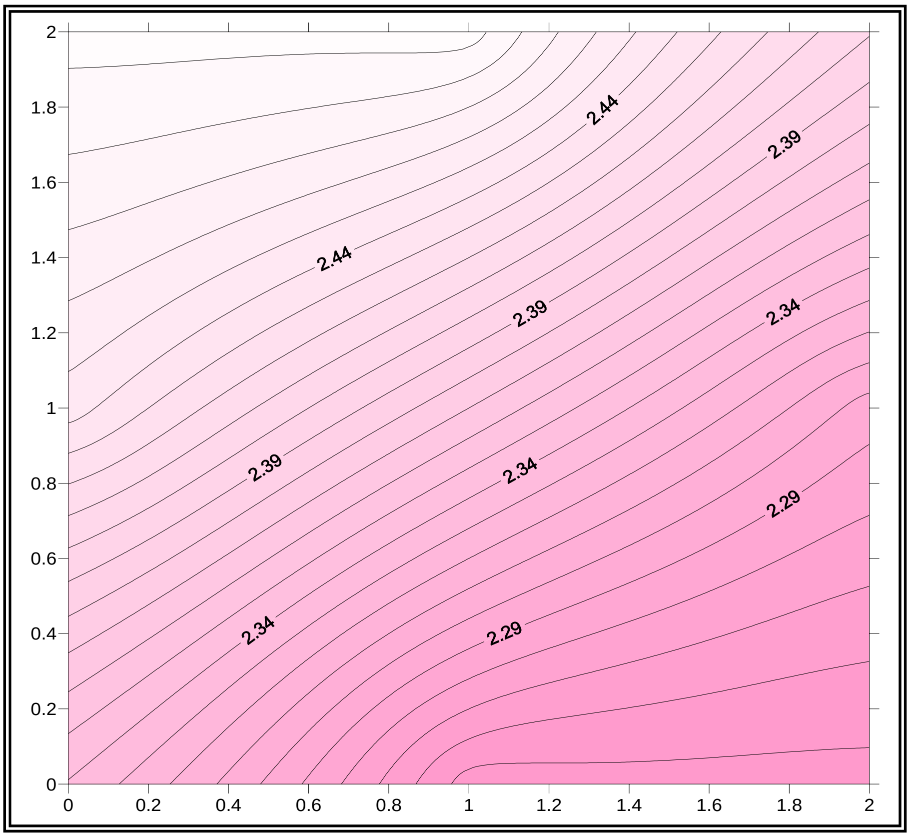
جدول (2): درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها بـ $\hat{\mu}(x)$

u	v	$\tilde{z}(x)$
1	2	2.495
0	1	2.445
2	1	2.295
1	0	2.245

ولغرض تمهيد السطح المتنبأ به نستخدم المعادلـة (8) .الآن إذا اسـتخدمنا $\hat{\mu}(u,v)$ لتنبـؤ $\tilde{Z}(u,v)$ ، نلاحظ أن القيم المقدرة سوف تكون قريبة جدا من معظم القيم الحقيقية كما موضـح في الجدول (2) وكذلك الشكلان (3) و (4) يوضحان الرسـم الكنتـوري لـدرجات معـدن الألمنيوم الحقيقية والمتنبأ بها على التوالي.



الشكل (3): الكنتور لدرجات معدن الألمنيوم الحقيقية



الشكل (4): الكنتور لدرجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها

الآن بعد ان قدرنا الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ ومنه تم التنبؤ بقيم $Z(x)$ بواسطة $\tilde{Z}(x)$ ،نقوم بتقدير $\hat{w}(x)$ وذلك بواسطة المعادلة الآتية:

$$\hat{w}(x) = (Z - \hat{\mu})' \sum{}^{-1} C(x)$$

$$u(x) = (Z - \hat{\mu})'$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} Z(x) - \hat{\mu}(x) \end{bmatrix}'$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 0.045 & -0.045 & -0.045 & 0.045 \end{bmatrix}'$$

$$\therefore \hat{w}(x) = u(x) \sum{}^{-1} C(x)$$

وبعد الحصول على قيم المتجه $u(x)$ ومعرفة المصفوفة $\sum^{-1}$ نقوم باستخراج قيم المتجه $C(x)$ لكل موقع من النموذج المعطى:-

$$C(x) = C(u,v) = 0.0085(4-h)$$

فمثلا قيمة $C(x)$ عند الموقع الأول تكون كالآتي:

$$C(1,2) = 0.0085 \begin{bmatrix} 4 - \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{14} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= 0.0085 \begin{bmatrix} 4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4142 \\ 1.4142 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= 0.0085 \begin{bmatrix} 4 - \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5858 \\ 2.5858 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C(1,2) = \begin{bmatrix} 0.034 \\ 0.0219793 \\ 0.0219793 \\ 0.017 \end{bmatrix}$$

وهكذا يتم إيجاد $\hat{w}(x)$ للموقع الأول أي :

$\hat{w}(1,2) = 0.045$

وبالطريقة نفسها نجد $\hat{w}(x)$ عند الموقع (0,1) والموقع (2,1) والموقع (1,0) وتكون 0.045- 0.045,-0.045- وعلى التوالي ،وكما موضح في الجدول (3).

الجدول (3) القيم المقدرة لـ $\hat{w}(x)$

U	V	$\hat{w}(x)$
1	2	0.045
0	1	-0.045
2	1	-0.045
1	0	0.045

وللحصول على الدرجات المتنبأ بها $\hat{Z}(x)$ يكون من المعادلة الآتية:

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{w}(x)$$

انظر الجدول (4) يوضح نتائج المثال.

الجدول (4): درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها للنموذج الكامل

U	V	$\hat{\mu}(x)$	$\hat{w}(x)$	$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{w}(x)$
1	2	2.495	0.045	2.54
0	1	2.445	-0.045	2.4
2	1	2.295	-0.045	2.25
1	0	2.245	0.045	2.29

نلاحظ أن درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها تساوي الدرجات الحقيقية لمعدن الألمنيـوم فـي المواقع المشار إليها ومن هذا نستنتج قوة التنبؤ عند استخدام معادلات كرگنك الشامل.

ملاحظة: تم الحصول على النتائج بتطبيق البرنامج بلغة Matlab في الملحـق وتـم رسـم الأشكال الكنتورية بواسطة البرنامج الجاهز Surfer.

الاستنتاجات

1. ان أية طريقة احصائية اعتيادية ،يتم تصنيف البيانات بها ثم تمثـل بواسـطة الرسـم البياني الاحصائي مثـل Histogram لا تأخـذ بنظـر الاعتبـار مواقـع العينـات sample Location في المنطقة قيد الدراسة،أي عدم قدرة الاحصائيات الاعتياديـة الاخذ بنظر الاعتبار الناحية المكانية للظاهرة .فالمتغير المكاني هو دالة حقيقية تأخـذ

قيمة محددة في كل نقطة (موقع) في المجال قيد الدراسة.والموقع يتمثل بالاحـداثيات ثنائية او ثلاثية البعد.

2. ان اسلوب كرگنك يعد اسلوب نمذجة احصائيا مكانيا يأخذ بنظر الاعتبـار التركيـب المكاني الاساسي الموجود في المعلومات المكانية ،اذ يمكن احصائياً اشتقاق التنبـؤات المثلى بإعطاء افضل التقـديرات غيـر المتحيـزة Best Unbiased Estimates ، وتكون هذه التنبؤات لموقع ذي مشاهدات غير مقاسة وكذلك ايجاد قيم تنبؤية للبيانات الحقيقية والتي يمكن اعتبارها سطحاً ممهداً لتنبؤات لاحقة.

التوصيات

في التطبيق العملي ربما يكون الاتجـاه Trend معروفـاً أي توقـع $E[z(x)]$ عـدم الاستقرارية يكون موجود ضمن مواقع معينة قيد الدراسة،أي هناك تغيـر فـي الاتجـاه،اذن يصبح من الضروري استخدام اسلوب كرگنك الشامل Universal Kriging.

المصادر

1. محمود،اسماء غانم (2006):"اسلوب بيز في التنبؤ عـن العمليـة العـشوائية المكانية-مع تطبيق على المياه الجوفية في قضاء سنجار"اطروحـة دكتـوراه (غيـر منشورة)،كلية علوم الحاسبات والرياضيات،جامعة الموصل،موصل،العراق.
2. Cressie, N. (1993):"**Statistics for Spatial Data**", Wiley, 2nd Edition. New York.
3. Davis, J.C. (1986):"**Statistics and Data Analysis in Geolo-gy**", 2nd edition. Wiley, New York.
4. David, M. (1977): "**Geostatistical Ore Resoure Estimation**", Elsevier, Amsterdam.
5. Delfiner.P. (1976):"**Linear Estimation of Nonstationary Spatial Phenomena**", In.: C (Ed) Advances Geostatisics In Mining Industry Reidel, D. Publishing Co Holland, PP.(49-68).
6. Delhomme, J. P. (1978): "**Kriging in the Hydrosciences, Adances in Water Resources**", No.1, PP. (251-266).
7. Diggle,P.J.,Ribeiro Jr.,P.J.and Christensen, O. F. (2003): "**An Introduction to Model based Geostatisics. In: Spatial Statistics and Computational methods**", (ed. J. Moller), Springer Verlag, 43-86.
8. Huijbregts, Ch. And Matheron, G. (1970): " **Universal Kriging-an Optimal a pproach to trend Surface analysis**" in Decision-Making in the Mineral Industry, Special Volume No. 12 , CI MM Montreal, PP.159-169.

9. Isaaks, E. H. and Srivastava, R. M., (1989):"**An Introduction to Applied Geostatistics**", Oxford University Press, New York.
10. Journel, A.G.and Huijbregts,C.J.(1978):"**Mining Geostatistics**", Academic Press, London.
11. Jurgen Symanzik, (2000): "**Applied Spatial Statistics**", Utah State University.
12. Olea.R.A. (1974):"**Optimal Contour Mapping Using Universal Kriging**", Journal of Geophysical Research-, No.79, PP. (695-702).
13. Papritz,A.,Stein,A.;(1999): "**Spatial Prediction by Linear Kriging Spatial Statistics for Remote Sensing**", Nether-lands, PP.(83-113).
14. Ripley, B. D., (1981): "**Spatial Statistics**", Wiley, New York.
15. Stein,M.L.,(1999):"**Interpolation of Spatial Data, Some Theory for Kriging**". Springer, New York.
16. Venables,W.N.and Ripley,B.D.,;(2002):"**Modern Applied Statistics**", New York: Springer-Verlag, Fourth Edition.
17. Wackernagel,H.,(1998):"**Multivariate Geostatisics**",(2nd, Completely Revised Edition), Springer, Berlin, Germany.
18. Webster,R.and Oliver,M.,(2001):"**Geostatisics for Environmental Scientists**", Chichester; Wiley and Sons.

الملحق

```
clc
clear;
z=[6.2 7.4 6.2 6.2 7.3 6.1 6.1 3.6 3.4 3.4 7.5 7.4 6.2 7.3 6.2 6.2 3.9 3.5 3.5
3.2 7.2 6.2 6.2 7.3 6.2 6.1 5.8 5.6 5.4 5.3 7.1 6.2 6.1 6.2 6.1 5.8 5.6 5.4
5.2 5.2 6.0 6.0 6.1 6.0 5.9 5.6 5.6 5.2 5.1 3.9 5.9 5.9 6.0 5.7 5.9 5.5 5.2
5.0 3.9 3.8 5.8 5.8 5.6 5.6 5.3 5.2 3.8 3.9 3.8 3.7 5.7 5.4 5.1 5.1 5.2 3.8
3.8 3.7 3.5 3.4 5.5 5.2 3.9 3.8 3.8 3.6 3.6 3.5 3.4 3.4 5.2 3.9 3.7 3.7 3.6
3.5 3.3 3.2 3.1 3.0];
u=[1.9;3.8;1.5;1.4;4.5;1.8;1.5;3.0;3.0;3.3;4.0;4.9;1.7;4.7;1.8;1.7;0.8;0.8;0.
8;3.2;3.0;1.7;1.5;4.5;1.7;1.5;1.3;1.1;1.2;1.4;3.2;1.6;1.8;1.8;1.8;1.1;1.5;1.3
;1.4;1.4;1.7;1.5;2.0;1.5;0.8;1.3;1.2;1.0;1.0;0.7;0.9;1.6;1.7;1.2;1.6;1.0;1.3;
1.3;0.9;0.6;1.5;1.4;1.5;1.4;1.3;1.3;0.9;0.3;0.7;0.7;1.4;1.4;1.5;1.4;1.5;0.7;0
.9;0.4;0.5;0.9;1.8;1.5;0.7;0.9;0.6;3.6;3.4;3.4;3.1;3.5;1.3;0.8;0.8;0.7;0.5;0.
6;0.9;3.4;3.2;3.1];
v=[3.7;4.3;3.7;3.9;4.4;3.8;4.0;4.0;5.1;4.9;4.5;4.2;3.5;4.0;3.4;2.9;3.1;3.3;3.
0;3.6;3.9;3.8;3.9;4.2;3.5;3.1;5.1;5.4;4.4;4.2;3.9;3.5;3.1;3.3;2.9;5.1;4.9;5.1
;5.4;4.7;2.8;3.0;3.3;3.1;4.5;4.9;5.2;4.4;4.2;3.1;4.8;4.0;4.5;5.5;4.3;5.2;4.2;
3.9;3.7;3.6;4.9;5.2;3.9;5.2;4.0;4.3;3.8;4.8;3.3;3.7;4.2;4.0;3.9;4.4;4.3;3.5;3
.9;4.1;4.5;3.1;4.6;4.3;3.1;3.0;3.1;4.0;4.7;4.7;4.2;4.6;4.4;3.5;2.9;2.6;2.9;3.
0;3.3;4.0;3.9;2.8];
z=z';
for i=1:100
   for j=1:100
      h(i,j)=sqrt((u(i)-u(j))^2+(v(i)-v(j))^2);
   end
end
% delet zeros spas%
for i=1:99
   for j=i+1:100
      if h(i,j)<=0
         u(j,1)=0;
         v(j,1)=0;
         z(j,1)=0;
      end
```

```
   end
end
k=0;
for i=1:100
   if u(i) >0
      k=k+1;
      u1(k,1)=u(i,1);
      v1(k,1)=v(i,1);
      z1(k,1)=z(i,1);
   end
end
%begin the program%
clear u,v,z;
clear h;
xu=u1;
xv=v1;
z=z1;
%%%%%%%
for i=1:88
   for j=1:88
      h(i,j)=sqrt((xu(i)-xu(j))^2+(xv(i)-xv(j))^2);
   end
end
%%%%%%%%%%%
c0=0.2;
c=6.6;
a=4.25;
for i=1:88
   for j=1:88
      if h(i,j)==0
        qh(i,j)=c+c0;
      elseif h(i,j)<a
         qh(i,j)=c*(1-(3*h(i,j)/(2*a))+0.5*(h(i,j)/a)^3);
      else
         qh(i,j)=0;
      end
   end
end
```

```
%%%%%
qq0=c0+c;
for k=1:88
   xu0=xu(k,1);
   xv0=xv(k,1);
   fg=0;
   ww=qh;
   for i=1:88
      if i ~=k
         fg=fg+1;
         h0(fg)=sqrt((xu0-xu(i))^2+(xv0-xv(i))^2);
         z11(fg,1)=z(i);
      end
   end
   ww(:,k)=[];
   ww(k,:)=[];
   h0n(:,k)=h0';
   j=ones(87,1);
   ww=inv(ww);
   clear qh0;
   for i=1:87
      if h0(i)==0
        qh0(1,i)=c+c0;
      elseif h(i,j)<a
         qh0(1,i)=c*(1-(3*h0(i)/(2*a))+0.5*(h0(i)/a)^3);
      else
         qh0(i,j)=0;
      end
   end
   qh0n(:,k)=(qh0(1,:));
   qh0=qh0';
   clear yy;
   yy=((1-qh0'*ww*j)/(j'*ww*j))*(ww*j)+(ww*qh0);
   yyn(:,k)=yy;
   %%%%%%%%%%%%%%
   z00=yy'*z11;
   z00n(k,1)=z00;
   %%%%
```

```
   qq2=qq0-qh0'*ww*qh0+((1-j'*ww*qh0)^2/(j'*ww*j));
   qq2n(k,1)=qq2;
   %%%
   qqz=(qh0'*ww*qh0)+((1-(j'*ww*qh0)^2)/(j'*ww*j));
   qqzn(k,1)=qqz;
end
```