المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات-الاحصاء والمعلوماتية
ص ص [49- 56]

الجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب

نصر مجيد احمد* خضر محمد صالح**

الملخص

في هذا البحث تمت دراسة الجريان الثنائي البعد لغشاء سائل رقيق متناظر لزج يجري على سطح صلب بإهمال قوى القصور الذاتي، وقد استخدمت معادلات نافير – ستوكس لإيجاد المعادلة التي تحكم هذا الجريان. وتم حل هذه المعادلات تحليلاً.

Steady flow of Viscous Thin films on solid surface

Abstract

In This paper we consider two dimensional flow to a viscous symmetric thin liquid film flow on solid surface with no inertia force . Navier – stokes equation has been used to find the equation that governs this flow, we solve these equations analytically.

---

* استاذ مساعد/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/قسم الرياضيات

** مدرس مساعد /كلية علوم الحاسبات والرياضيات/قسم الرياضيات

تاريخ التسلم: 2009/7/1 ———————— تاريخ القبول : 6 /12 /2009

المقدمة :

إن الرغوة (Foam) والأغشية الرقيقة (thins film) التي عادة ما تتكون من هواء وسـائل لزج مع الشد السطحي (surface tension) هي حالة خاصة في ميكانيك المواقع والتي لهـا أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عملية طلاء أسطح الرسم والطبقات الفضية على أقراص (CD) المدمجة.

درس (E.O.Tuckand L.W.Schwartz , 1990) الطريقة العددية لحل بعض المعـادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبـة الثالثـة والمتعلقـة بجريـان الأغـشية , ودرس (1997 , B.R.Duffy and S.k.Wilson) جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للمواقع والتي يكون فيهـا الغشاء سطحاً حراً بوجود الشد السطحي , كما درس كـل مـن Janmen.J.Kn , smann and Michael T. Misis,1998)) جريان الأغشية الرقيقة على سطح صـلب مائـل مـع وجود الشد السطحي وباسـتخدام نظريـة الترتيـب . ودرس (M.A.S Majeed , 2002) الجريان اللازمني في الأغشية الرقيقة بإهمال قوي القـصور الـذاتي , ودرس (Khider M.S.Khider,2003,) الجريان اللزج في بعض الأغشية الرقيقة السائلة المائلة.

وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب بصورة أفقية.

المعادلات التي تحكم الجريان Governing equation

لوصف الجريان الثنائي البعد لمائع غير قابل للانضباط نأخذ الاحداثيات الكارتيزية $\bar{y},\bar{x}$ اذ أن الاحداثي $\bar{x}$ هو الاحداثي المتناظر وان الجريان يكون باتجاه الاحداثي $\bar{x}$ وان الاحداثي $\bar{y}$ يكون عموديا عليه.

نفرض أن $\bar{v},\bar{u}$ هي مركبات السرعة في الاتجاهين $\bar{y},\bar{x}$ على الترتيب وان $\bar{p}$ يمثل الضغط.

لتكن معادلة السرعة للغشاء بالصيغة الاتية:-

$$\bar{y}=\bar{h}(\bar{x},\bar{t}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

سوف نحصر اهتمامنا بالمسالة التي يكون فيها $\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}<<1$ على المجال $\bar{x}$

و بهذا يمكن إهمال الحد $(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}})^2$ من معادلة الانحناء والتي لها الصيغة الاتية:-

$$k=\frac{\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial\bar{x}^2}}{\left[1+(\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}})^2\right]^{3/2}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

فتصبح بالصيغة الاتية:-

$$k = \frac{\partial^2 \overline{h}}{\partial \overline{x}^2} \qquad \text{............(2.4)}$$

وان معادلة الاستمرارية للجريان الثنائي لها الصيغة الاتية:-

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0 \qquad \text{...........(2.5)}$$

وان معادلتي الزخم (معادلات نافيرستوكس) في الثنائي البعد لهما الصيغتان الاتيتان :-

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \mu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right) + \rho g_{\overline{x}}. \qquad \text{.....(2.6)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{t}} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} + \mu\left(\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2}\right) + \rho g_{\overline{y}} \qquad \text{.........(2.7)}$$

وباستخدام نظرية ألتزيت للمعادلتين (2.6) و (2.7) نحصل على ما ياتي:

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} \qquad \text{..................(2.8)}$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = -\rho g \qquad \text{..................(2.9)}$$

(حيث أن التعجيل باتجاه $\overline{y}$ سالب).

(3-1) المتغيرات اللابعدية: Non- dimensional

سوف نعرف المتغيرات اللابعدية كالأتي:-[4]

$$\overline{x} = Hx\ , \quad \overline{y} = Hy\ . \quad \overline{t} = \frac{H}{v}t\ , \quad \overline{u} = uU\ , \quad \overline{v} = vU$$

$$\overline{p} = \frac{\delta}{H}p\ , \quad \overline{h} = Hh \qquad \text{..................(3.2)}$$

(4-1) الشروط الحدودية : Boundary Conditions

1- شرط عدم الانزلاق No-slip condition

$$\bar{u} = -U \ , \quad \bar{v} = 0 \ \ on \quad \bar{y} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.2)$$

2- شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء

Tangential Stress Condition

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \ , \quad on \ \ \bar{y} = \bar{h} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

3- شرط الجهد العمودي: Normal –Stress Condition

$$\bar{p} = -\sigma\, k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4)$$

حيث أن σ تمثل الشد السطحي.

بتعويض المعادلة (2.4) في المعادلة(4.4) نحصل على ما ياتي:

$$\bar{p} = -\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.5)$$

4- شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر .[4]

Material derivative at free surface condition

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \qquad on \qquad \bar{y} = \bar{h} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.6)$$

وباستخدام المعادلة (3.2) في المعادلات (2.5) , (2.8) , (2.9) , (4.2) , (4.3) , (4.4) (4.5) و (4.6) بالترتيب نحصل على ما ياتي:-

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ca \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.9)$$

حيث أن $ca = \frac{\mu U}{\sigma}$ يمثل العدد العشري و $B = \frac{\rho g H^2}{\sigma}$ يمثل عدد بوند

$$u = -1 \ , \qquad v = 0 \qquad on \quad y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad on \;\; y=h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.11)$$

$$p=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad on \quad y=h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.12)$$

$$v=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}, \; on \quad y=h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.13)$$

(5-1)العمليات الرياضية لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان.

نكامل المعادلة (4.9) بالنسبة الى y نحصل على ما ياتي:

$$p(x,t)=-By+f(x,t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.2)$$

حيث إن f(x,t) ثابت التكامل.

ومن المعادلتين (4.12) و (5.2) عندما y=h نحصل على ما ياتي:

$$f(x,t)=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+Bh \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.3)$$

نعوض المعادلة (5.3) في المعادلة (5.2) فنحصل على ما ياتي:

$$p(x,t)=-By-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+Bh \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.4)$$

نشتق المعادلة (5.4)بالنسبة الى x فنحصل على:-

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+B\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.5)$$

ومن المعادلة (4.8) و(5.5) نحصل على ما ياتي:-

$$ca\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.6)$$

نكامل المعادلة (5.6) بالنسبة الى y فنحصل على:-

$$ca\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}y+B\frac{\partial h}{\partial x}y+g(x,t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.7)$$

حيث $g(x,t)$ ثابت التكامل.

وباستخدام المعادلة (4.11)عندما y=hنحصل على

$$0=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h-B\frac{\partial h}{\partial x}h+g(x,t)$$

أو

$$g(x,t)=\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h-B\frac{\partial h}{\partial x}h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.8)$$

نعوض المعادلة (5.8) في (5.7) فنحصل على ما ياتي:

$$ca\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}y + B\frac{\partial h}{\partial y}y + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h - B\frac{\partial h}{\partial x}h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.9)$$

نكامل المعادلة (5.9) بالنسبة إلى y فنحصل على:-

$$cau = -\frac{y^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{y^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}hy - B\frac{\partial h}{\partial x}hy + E(x,t) \qquad \ldots\ldots\ldots(5.10)$$

وباستخدام المعادلة (4.10) عندما y=h نحصل على:-

$$-ca = \mathrm{E}(x,t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.11)$$

نعوض المعادلة (5.11) في المعادلة (5.10) عندما y=h فنحصل على ما ياتي:-

$$cau = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h^2 - B\frac{\partial h}{\partial x}h^2 - ca$$

أو

$$cau = \frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x} - ca \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.12)$$

بضرب طرفي المعادلة (5.12) في h وقسمتها على ca نحصل على ما ياتي:-

$$uh = \frac{h^3}{2ca}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.13)$$

نشتق المعادلة (5.13) بالنسبة الى x فنحصل على ما ياتي:-

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) = \frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.14)$$

وبتكامل المعادلة (4.7) بالنسبة الى y عندما y=h فنحصل على ما ياتي:-

$$v = -h\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.15)$$

وبتعويض المعادلة (5.15) في (4.13) نحصل على ما ياتي:-

$$-h\frac{\partial h}{\partial x} - u\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uh) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.16)$$

وبتعويض المعادلة (5.16) في المعادلة (5.14) نحصل على ما ياتي:-

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.17)$$

(6-1) الجريان اللازمني:- Steady flow

في حالة الجريان اللازمني فأن المعادلة (5.17) تصبح بالصيغة:-

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-B\frac{\partial h}{\partial x}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.2)$$

نكامل المعادلة (6.2) بالنسبة لـ x فنحصل على ما ياتي:-

$$h=\frac{h^3}{2ca}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-B\frac{\partial h}{\partial x}\right]+A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.3)$$

حيث أن A ثابت التكامل.

تضرب طرفي المعادلة (6.3) في $\frac{2ca}{h^3}$ فنحصل على ما ياتي:-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{2cah}{h^3}-\frac{2caA}{h^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.4)$$

وبفرض الثوابت $ca=\frac{1}{2}$, $A=1,$, $B=0$ نحصل على:-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{h-1}{h^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.5)$$

كل حل للمعادلة (6.5) والذي له أهمية في بحثنا هذا يمتلك منطقة تمثل الغشاء المناسب والتي تكون h فيها قريبة في الواحد, أي الخصائص التي تميز مختلف الحلول ممكن دراستها من المعادلة الخطية للمعادلة التفاضلية (6.5) عندما تكون h-1 صغيرة جداً أي أن:-

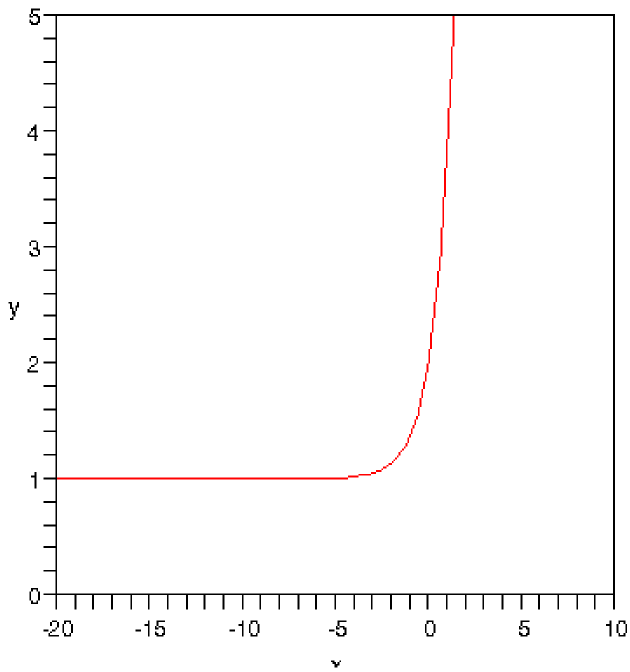
$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=h-1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.6)$$

المعادلة (6.6) لها ثلاثة حلول حقيقية خطية مستقلة والحل العام لها يمكن كتابته بالصيغة:-

$$h-1=c_1e^x+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.7)$$

والحل العام للمعادلة (6.7) كما مبين في الشكل (1.1) بعد إعطاء قيم للثوابت

$c_1=1, c_2=c_3=0$



الشكل (1.1): يمثل منحنى الحل للمستوى (x, h) للمعادلة (6.7)

الاستنتاجات :- Conclusions

في دراستنا للجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب يتبين من حلول المعادلة التي تحكم الجريان بان سمك الغشاء يقترب من الواحد عندما تقترب x من القيم السالبة $h \to 1$ عندما $x \to -\infty$ بينما يتذبذب سمك الغشاء كلما اقترب x من الصفر.

المصادر: References

1. B.R. Duffy and S.K. Wilson, "A third–order deferential equation arising in thin–film flows and relevant to Tanner's Law", App. Math. Lebb, vol. 10, No. 3, pp. 63–68, 1997.
2. E.O.Tuck and L.W.Schwartz "Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows"No.3,pp.453-469,September 1990.
3. James J.Kriegsmann and Michael J. Miksis " Pressure driven disturbances on a thin viscous film" Phys.Fluids,Vol.10,No.6,June 1998.
4. Khider,M.S.Khider, "Viscous flow in certain inclined thin liquid films" M.Sc.thesis,University of Mosul 2003.
5. Majeed,M.A.S, "Steady flow in thin liquid films with negligible inertia" M.Sc.thesis, University of Mosul 2002.