المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (18) 2010
ص ص [33–50]

تحسين خوارزمية كارماركار للحصول على الحل الأمثل

أحمد محمود السبعاوي* إدريس محمد نوري**

الملخص:

تم في هذا البحث تحسين طريقة كارماركار في البرمجة الخطية وذلك باستخدام المتجه الخـاص لنقطـة البدايـة مـع كـل التكـرارات وكـذلك تـم اسـتخدام $\theta = \frac{n}{3(n-1)}$، حيث أظهر التحسين أن طريقة كارماركار يمكن اختزالها إلـى طريقة مباشرة من دون تكرارات والوصول إلى الحل الأمثل. كذلك تـم بـأجراء مقارنة بين الطريقتين وكانت نتائج الطريقة المقترحة أسرع وأحسن للوصول إلـى الحل الأمثل.

Improving Karmarkar's method for optimal solution

Abstract

In this paper we improve the Karmarkar's method for linear programming by using the vector of initial point with all iteration, and when $\theta = \frac{n}{3(n-1)}$, we see that the Karmaker's method can be reduced to a direct method without iteration and grantee the optimal solution. Finally the new method have been compared with Karmaker's. The numerical results show that the new method is better and faster.

* أستاذ مساعد/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات – قسم الإحصاء والمعلوماتية

** مدرس/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات – قسم الإحصاء والمعلوماتية

تاريخ التسلم: 27/ 9/ 2009 ــــــــ تاريخ القبول : 4/1 /2010

1.المقدمة

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزاً مرموقاً في مجال بحوث العمليات ولها تطبيقات واسعة في كثير من المجالات العلمية وبمرور الزمن تم تطوير الاساليب العلمية المستخدمة في حل معضلات البرمجة الخطية بعد الحرب العالمية الثانية وقد ظهر هذا الاستخدام للبرمجة الخطية تحت اسم بحوث العمليات. فاساليب البرمجة الخطية تطبق لايجاد احسن استخدام للموارد المحدودة، وكلمة برمجة تعني استخدام طريقة معينة للحصول على افضل الحلول الممكنة لمشكلة تتصل بالموارد المحدودة، وصفة الخطية مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر، والحل الذي يتلاءم مع قيود المسألة ودالة الهدف يسمى الحل الامثل.

في عام 1984 قدم كارماركار (Karmarker, 1984) خوارزمية جديدة لحل مشاكل جميع أنواع المسائل الخطية وغير الخطية ، التي كانت أسرع بكثير من الطريقة المنفردة البسيطة (Simplex). إذ تألفت طريقته من تطبيقات متكررة للانتقالات الاسقاطية (Projection)، وكل منها متبوع بالامثلية عبر الجسم الكروي الموصوف لغرض إنشاء متتالية للنقاط الداخلية التي تقرب نحو الحل الأمثل في حالة متعدد الحدود . ومنذ التوصل إلى طريقة كارماركار ، جذبت طرائق النقطة الداخلية اهتمام بعض الخبراء المشهورين في بحوث العمليات وفي الرياضيات التطبيقية وفي علوم الحاسبات انظر مثلا (Zsuzsanna and M´arta, 2003) (Karloff, 2009) ،(Peng et al, 2001) ، (Kebbiche et al, 2007)، و(Nemirovski and Todd, 2008). وقد أوضح الفحص التمهيدي لطريقة كارماركار بالنسبة لـ (LP) الكبيرة أن سرعة هذه الطريقة قد تصل إلى 50 مرة من سرعة الخوارزمية المنفردة (Winston, 1992).

وفي عام 1999 تناولت رسالة طالبة الماجستير نادية أكرم محمد الموسومة (تحسين خوارزمية كارماركار المطورة للبرمجة التربيعية المحدبة) عملية تحسين هذه الطريقة باستخدام طريقة المجسم الناقص الداخلي الذي نصف قطره β. وفي عام 2007 تناولت رسالة طالب الماجستير محمد مؤيد ذنون الموسومة (استخدام طريقة كارماركار لحل مشكلة البرمجة الخطية والتربيعية), عملية تحسين للخوارزمية وذلك بتكبير قيمة θ وكانت النتائج أفضل وأسرع.

2. الجانب النظري

1.2. الشكل القانوني لطريقة كارماركار في حل البرمجة الخطية (LP)

تتطلب طريقة كارماركار أن تكون مسائل (LP) كالآتي (Edwin and Stanislaw, 2001) :

1 . المركز $\mathbf{a_0}$ في المبسط Δ هو نقطة حل ، أي أن $\mathbf{a_0} \in \Omega$.

2 . القيمة المثلى لدالة الهدف في منطقة الحل هي صفر .

3 . المصفوفة

$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{e^T} \end{bmatrix}$ ذات قياس $\mathbf{(m+1) \times n}$ لها رتبة m + 1 .

4 . المعلمة $\mathbf{q > 0}$ بحيث إذا كانت x تحقق :

$$\frac{\mathbf{c^T x}}{\mathbf{c^T a_0}} \leq \mathbf{2^{-q}}$$

فأن x هي نقطة الحل .

ويمكن صياغة المسألة بالصيغة الآتية :

$$\min \quad c^T x \quad , \quad x \in R^n$$

s.t.

$$x \in \Omega \cap \Delta$$

حيث أن

$$\Omega = \{x \in R^n : Ax = 0\}$$

$$\Delta = \{x \in R^n : e^T x = 1,\ x \geq 0\}$$

$$e^T = [1,1,...1] \in R^n \ ,\ A \in R^{m \times n} \ , c \in R^n, \quad n \geq 2$$

2.2. خوارزمية كارماركار :

أن خوارزمية كارماركار هي خوارزمية تكرارية ، أي تبدأ بنقطة البداية x_0 ومعلمة q ثم نولد متتابعة $x_1, x_2, ...x_n$ كما في الخطوات الآتية (Karmarker, 1984):

الخطوة 1 : البدء عند النقطة الحرجة

$$x_0 = \frac{e}{n} \quad , k = 0 \ , \ \varepsilon > 0$$

الخطوة 2 : التوقف إذا كان $c^T x_k < \varepsilon$ **وإلا اذهب إلى الخطوة 3**

الخطوة 3: أيجاد النقطة $y_k = x_k - \theta\, r\, d_k$

حيث أن

$$\theta = \frac{n-1}{3n} \quad , \quad r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$\mathbf{d_k} = \frac{\mathbf{P_k}}{\|\mathbf{P_k}\|}$$

$$\mathbf{P_k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B_k^T}(\mathbf{B_k}\mathbf{B_k^T})^{-1}\ \mathbf{B_k}\right)\mathbf{D_k}\,\mathbf{c}$$

I: مصفوفة الوحدة ذات قياس (n*n)

$$\mathbf{D_k} = \mathbf{diag}(\mathbf{x^k})$$

$$\mathbf{B_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_k} \\ \mathbf{e^T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{A}\,\mathbf{D_k}$$

الخطوة 4 :

$$\mathbf{x_{k+1}} = \frac{\mathbf{D_k}\,\mathbf{y_k}}{\mathbf{e^T}\,\mathbf{D_k}\,\mathbf{y_k}}$$

وتتم زيادة k وحدة واحدة ومن ثم الرجوع إلى الخطوة 2 .

ونلاحظ أن النقاط التي نحصل عليها بهذه الخطوات سوف تقـع فـي المجموعـة المقيدة :

$$\Omega \cap \Delta = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R^n} : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{e^T x} = \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R^n} : \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{e^T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R^n} : \mathbf{B_0}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

حيث أن $\mathbf{B_0} \in \mathbf{R^{(m+1)\times n}}$

3.2. الطريقة المقترحة

إن أهم الاختلافات الموجودة بين الطريقة المقترحة وطريقة كارماركار هي:

1. استخدام متجه واحد فقط $\mathbf{d_0}$ وهو المتجه الخاص بنقطة البداية $\mathbf{x_0}$ مع كل التكرارات لحين الحصول إلى الحل الأمثل.
2. تم استخدام $\theta_2 = \frac{n}{3(n-1)}$ بدلا من $\theta_1 = \frac{n-1}{3n}$ المستخدمة في خوارزمية كارماركار، والمقصود ب θ هي طول الخطوة بحيث أن $1 > \theta > 0$، ونشير إلى أن $\theta = \frac{1}{4}$ في البحث (Karmarker, 1984)، وان المعيار الرئيسي في اختيار θ (Edwin and Stanislaw, 2001) هو جعلها ذات قيمة كبيرة ضمن الفترة $(0,1)$ بشرط أن $\mathbf{y_k = x_k - \theta\, r\, d_k > 0}$ ولجميع قيم $\mathbf{k}$.

علماً بان بعض الباحثين استخدموا قيما مختلفة ل θ مثلا $\theta = \mathbf{0.9}$ أو $\theta = \mathbf{0.99}$ (Nash and Sofer, 1996).

والسبب الذي دعانا إلى اختيار $\theta_2 = \frac{n}{3(n-1)}$ بدلا من $\theta_1 = \frac{n-1}{3n}$ يعود إلى أن θ_1 و θ_2 في حالة كون $\mathbf{n}$ كبيرة فان $\theta_1 = \theta_2$ وكما ياتي:

$$\lim_{n\to\infty}\theta_1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{3n}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$$

كذلك

$$\lim_{n\to\infty}\theta_2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3(n-1)}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-0}\right]=\frac{1}{3}$$

أما في حالة كون n صغيرة مثلاً $n = 2, 3, \ldots$ فان $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ وان $\theta_2 > \theta_1$

بشرط تحقيق جميع شروط الخوارزميةالمذكورة انفا .
ويمكن وصف الطريقة المقترحة بالخطوات الآتية:

الخطوة 1 : البدء عند النقطة الحرجة

$$x_0=\frac{e}{n} \quad , k = 0 \quad , \varepsilon > 0$$

الخطوة 2 : التوقف إذا كان $c^T x_k < \varepsilon$ وإلا اذهب إلى الخطوة 3

الخطوة 3 : أيجاد النقطة $y_k = x_k - \theta r d_0$

حيث أن $\theta = \dfrac{n}{3(n-1)}$ ، $r = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

$$d_0=\frac{P_0}{\|P_0\|}$$

$$P_0=\left(I - B_0^T (B_0 B_0^T)^{-1} B_0\right) D_0 c$$

$$D_0 = diag(x_0)$$
$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0 \\ e^T \end{bmatrix}$$
$$A_0 = A\,D_0$$

الخطوة 4 :
$$x_{k+1} = \frac{D_0 y_k}{e^T D_0 y_k}$$

وتتم زيادة k وحدة واحدة ومن ثم الرجوع إلى الخطوة 2 .
وبذلك نحصل على متتابعة من النقاط $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ كما في خوارزمية كارماركار وكلها تقع في المنطقة المقيدة أي أن $x \in \Omega \cap \Delta$.
ومن خلال استخدامنا متجها واحدا (d_0) لاحظنا الآتي:

التكرار الأول :

$$y_0 = x_0 - \theta\, r\, d_0$$
$$x_1 = \frac{D_0 y_0}{e^T D_0 y_0} = y_0$$

سوف نبرهن الحقيقة أعلاه (أي أن $x_1 = y_0$) عندما $k=0$ ولحالة $n = 2$ والبرهان صحيح عندما $n > 2$.

لنحسب المقدار $y_0 = x_0 - \theta\, r\, d_0$

$$d_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$$

$$P_0 = \left(I - B_0^T (B_0 B_0^T)^{-1} \ B_0\right) D_0 c$$

$$D_0 = diag(x_0)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0 \\ e^T \end{bmatrix}$$

$$A_0 = A D_0 = \left[[a_1 \ \ a_2] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0.5a_1 & 0.5a_2 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} A D_0 \\ e^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5a_1 & 0.5a_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0 B_0^T = \begin{bmatrix} 0.25(a_1^2 + a_2^2) & 0.5(a_1 + a_2) \\ 0.5(a_1 + a_2) & 2 \end{bmatrix}$$

من تعريف مسالة LP نعلم أن $a_1 + a_2 = 0$ ، لذلك تصبح المصفوفة أعلاه بالصورة الآتية:

$$B_0 B_0^T = \begin{bmatrix} 0.25(a_1^2 + a_2^2) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(B_0 B_0^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(a_1^2 + a_2^2)} & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_0^T (B_0 B_0^T)^{-1} B_0 = \frac{1}{2(a_1^2 + a_2^2)} \begin{bmatrix} 3a_1^2 + a_2^2 & (a_1 + a_2)^2 \\ (a_1 + a_2)^2 & 3a_2^2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(a_1^2 + a_2^2)} \begin{bmatrix} 3a_1^2 + a_2^2 & 0 \\ 0 & 3a_2^2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

$$I - B_0^T (B_0 B_0^T)^{-1} B_0 = \begin{bmatrix} \frac{a_2^2 - a_1^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} & 0 \\ 0 & \frac{a_1^2 - a_2^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وذلك لان $a_1^2 - a_2^2 = a_2^2 - a_1^2 = 0$ من تعريف مسالة LP.

$$D_0 c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5c_1 \\ 0.5c_2 \end{bmatrix}$$

الآن

$$P_0 = \left(I - B_0^T (B_0 B_0^T)^{-1} B_0 \right) D_0 c$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبذلك يكون

$$d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على

$$y_0 = x_0 - \theta r d_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

والآن نحسب

$$x_1 = \frac{D_0 y_0}{e^T D_0 y_0} = \frac{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = y_0$$

التكرار الثاني:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \theta r d_0 \\ &= y_0 - \theta r d_0 \\ &= x_0 - \theta r d_0 - \theta r d_0 \\ &= x_0 - 2\theta r d_0 \end{aligned}$$

مادمنا نستخدم d_0 مع كل التكرارات وللأسباب المذكورة انفا فان:

$$x_2 = y_1 = x_0 - 2\theta r d_0$$

التكرار الثالث:

$$x_3 = y_2 = x_0 - 3\theta r d_0$$

التكرار k:

$$x_k = y_{k-1} = x_0 - k\theta r d_0 \quad ....(2)$$

وبذلك نحصل على طريقة مباشرة للوصول الى الحل الأمثل ومن دون تكرارات.

3. اختبار النتائج

سوف نستخدم المسائل الآتية في مقارنة النتائج

الاختبار -1-

---- تحسين خوارزمية كارماركار...

$$\text{Min} \quad z = 2x_2 - x_3$$

s.t.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -2-

$$\text{Min} \quad z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

s.t.

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -3-

$$\text{Min} \quad z = x_1 - 2x_2 + 6x_3$$

s.t.

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -4-

$$\text{Min} \quad z = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -5-

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 - x_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -6-

$$\text{Min} \quad z = -x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -7-

$$\text{Min} \quad z = x_1 - 3x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الاختبار -8-

[46]

\- -
\- -
\- -
\- -

\- - - - تحسين خوارزمية كارماركار...

$$\text{Max} \quad z = -4x_1 + x_3 - x_4$$
$$\text{s.t.}$$
$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

الاختبار -9-

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 5x_2 - 23x_5$$
$$\text{s.t.}$$
$$3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 - 13x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

وبعد أجراء المقارنة كانت النتائج كما في الجداول الآتية:

الجدول (1). للاختبار -1-

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.26918	0.33333	0.39748	0.2692
	2	0.15496	0.32549	0.51955	0.1314
	3	0.030331	0.2685	0.70117	-0.1642

الخوارزمية المقترحة	K=2	0.044658	0.33333	0.62201	0.0447

الجدول (2). للاختبار -2-

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.37037	0.25926	0.37037	0.5185
	2	0.43137	0.13726	0.43137	0.2745
	3	0.48949	0.021011	0.48949	0.0420
الخوارزمية المقترحة	K=2	0.5	0.000	0.5	0.000

الجدول (3). للاختبار -3-

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.37037	0.37037	0.25926	1.5556
	2	0.43137	0.43137	0.13726	0.8235
	3	0.48949	0.48949	0.021011	0.1261
الخوارزمية المقترحة	K=2	0.5	0.5	0.000	-0.5

الجدول (4). للاختبار -4 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.37037	0.25926	0.37037	0.2593
	2	0.43137	0.13726	0.43137	0.1373
	3	0.48949	0.021011	0.48949	0.0210

الخوارزمية المقترحة	K=2	0.5	0.000	0.5	0.000

الجدول (5). للاختبار -5 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.25926	0.37037	0.37037	0.2593
	2	0.13726	0.43137	0.43137	0.1373
	3	0.021011	0.48949	0.48949	0.0210
الخوارزمية المقترحة	K=2	0.000	0.5	0.5	0.000

الجدول (6). للاختبار -6 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.39748	0.33333	0.26918	0.2692
	2	0.51955	0.32549	0.15496	0.1314
	3	0.70117	0.2685	0.030331	0.1642 -
الخوارزمية المقترحة	K=2	0.62201	0.33333	0.044658	0.0447

الجدول (7). للاختبار -7 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	Z
كارماركار	1	0.40333	0.31933	0.27734	0.2773
	2	0.54266	0.28541	0.17193	0.2022
الخوارزمية المقترحة	K=2	0.6483	0.27034	0.081357	0.0814

الجدول (8). للاختبار -8 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	x_4	Z
كارماركار	1	0.21392	0.21392	0.28608	0.28608	-0.8557
	2	0.14608	0.14608	0.35392	0.35392	-0.5843
	3	0.052136	0.052136	0.44786	0.44786	-0.2085
الخوارزمية المقترحة	K=3	0.05755	0.05755	0.44245	0.44245	-0.2302

الجدول (9). للاختبار -9 -

	التكرارات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
كارماركار	1	0.22917	0.16866	0.18609	0.2345	0.18158	-2.1873
	2	0.28445	0.11268	0.15208	0.30628	0.14451	-1.3382
	3	0.36219	0.039824	0.081861	0.43825	0.077872	0.2190

[50]

الخوارزمية المقترحة	**K=4**	**0.38229**	**0.0041267**	**0.11309**	**0.41561**	**0.084886**	**-0.0203**

4. الاستنتاجات والتوصيات :

من خلال ملاحظتنا للنتائج التي تم الحصول عليها باستخدام الطريقة المباشرة الصيغة (2) تبين الآتي:

1. أنها طريقة مباشرة ومن دون تكرارات على عكس طريقة كارماركار وتضمن الوصول إلى الحل الأمثل .
2. تم التغلب على مشكلة أساسية في طريقة كارماركار والتي تضم حسابات هائلة جداً وخاصة في إيجاد المعكوس (الخطوة 3) من خلال استخدامنا المتجه الخاص لنقطة البداية $\mathbf{x_0}$ ومع كل التكرارات وهو $\mathbf{d_0}$.
3. لاحظنا من خلال الاختبارات بان الحل الأمثل يتم الحصول عليه في الطريقة المقترحة بوضع قيمة مناسبة ل k $(k=1, 2, 3,\dots n-1)$ ويجب الانتباه إلى هذه النقطة حيث أن اختيار هذه القيمة مهم جدا. وأفضل طريقة لاختيارها هي ملاحظة

قيمة x أي أن $x \in \Omega \cap \Delta$ بحيث أنه لو تمت زيادة k وحدة واحدة لكان $x \notin \Omega \cap \Delta$. بمعنى آخر

$$\mathbf{k = \{max\{1,2,3,...,n-1\}, s.t.\ x \in \Omega \cap \Delta\}}.$$

المصادر

1. Edwin, K. P. and Stanislaw, H. Z., "An Introduction To Optimization", by John Wily & Sons, Inc., America, 2001.
2. Karloff, H., "Linear Programming", Birkhauser .Boston. Berlin, 2009.
3. Karmarkar, N., "A new polynomial time algorithm for linear programming", Combinatorica 4 (1984), 373 - 395.
4. Kebbiche, Z., Keraghel, A. and Yassine, A., " An infeasible interior point method for the monotone linear complementarity problem ", Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, 2007, No. 17, 841 – 849.
5. Nash, S. G. and Sofer, A.," Linear and Nonlinear Programming", New York: McGraw-Hill, 1996.

6. Nemirovski, A. S. and Todd, M. J., " Interior-point methods for optimization ", Acta Numerica (2008), pp. 191–234
7. Peng, j., Roos, C. and Terlaky, T.," A new and efficient large-update interior-point method for linear optimization", Tom 6, 2001, N^2 4.
8. Winston, W., L.,"Operation Research Application and Algorithm", Indian, 1994.
9. Zsuzsanna, S´ and M´arta, K., " On interior-point methods and simplex method in linear programming", An. S¸t. Univ. Ovidius Constant a Vol. 11,2003 , No. 2, 155–162.
10. محمد مؤيد ذنون (2007)، "استخدام طريقة كارماركار لحل مشكلة البرمجة الخطية والتربيعية"، رسالة ماجستير-كلية علوم الحاسبات والرياضيات-جامعة الموصل.
11. نادية أكرم محمد (1999)،" تحسين خوارزمية كارماركار المطورة للبرمجة التربيعية المحدبة"، رسالة ماجستير-كلية علوم الحاسبات والرياضيات-جامعة الموصل.