w-Wiener Polynomials of the Width Distance of the Square of a Path and a Cycle and a m-Cubic

Ali A. Ali **Asma S. Aziz**
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 23/05/2007 **Accepted on: 28/06/2007**

ABSTRACT

Let G be a k_0-connected graph ,and let $1 \le w \le k_0$, $d_w(u,v)$,be the w-width distance between the two vertices u,v in G. The w-Wiener polynomial of the width distance of G is defined by:

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

The w-Wiener polynomials of the square of a path P_t^2, the square of a cycle C_t^2 ,and of an m-cube Q_m are obtained in this paper . The diameter with respect to the width distance –w ,and the Wiener index for each such graphs are also obtained .

Keywords: Wiener polynomials, path, cycle, width distance, Wiener index.

متعددات حدود وينر–w للمسافة العرضية لمربعي درب و دارة ومكعب– m

علي عزيز علي **أسماء صلاح عزيز**
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2007/05/23 **تاريخ قبول البحث: 2007/06/28**

الملخص

ليكن G بيانا متصلاً عامل اتصاله k_0 وأن $1 \le w \le k_0$، وأن $d_w(u,v)$ هي المسافة العرضية–w بين الرأسين u و v في G . تُعرف متعددة حدود وينر –w نسبة للمسافة العرضية–w على أنها

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

تضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر –w نسبة إلى المسافة العرضية –w لكل من مربع درب P_t^2، ومربع دارة C_t^2، ومكعب –m ، كما تضمن البحث إيجاد القطر بالنسبة إلى المسافة العرضية–w ، وإيجاد دليل لكل من هذه البيانات.

الكلمات المفتاحية: متعددات حدود وينر، درب، دارة، مسافة عرضية، دليل وينر.

1.المقدمة

ليكن u وv أي رأسين في بيان متصل G، تعرف **حاوية u وv** على أنها مجموعة دروب منفصلة داخليا تصل بين u وv ، ويرمز لها بـ C(u,v).

يعرف **عرض(width)** الحاوية C(u,v) على أنه عدد الدروب u-v في C(u,v) ويرمز له بـ w(C(u,v))، أي أن

$$w(C(u,v)) = |C(u,v)|$$

كما يعرف **طول الحاوية C(u,v)** على أنه الطول لأطول درب في الحاوية ويرمز له بـ $\ell(C(u,v))$. وأخيرا لأجل عدد صحيح موجب w نعرف **المسافة العرضية** أو(المسافة–w) بين رأسين u وv في بيان G [7] على أنها

$$d_w(u,v|\, G) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v)) \qquad \text{.....(1.1)}$$

حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات C(u,v) ذات العرض w. وعندما لا يكون هناك التباس فسوف نعبر عن المسافة العرضية بين u وv بـ $d_w(u,v)$.

من الواضح أنه عندما يكون $w=1$ فان المسافة–w تصبح المسافة الاعتيادية بين u وv. وفي بحثنا سنحاول دراسة المسافة–w عندما $w \geq 2$ أما الحد الأعلى لـw فانه عامل الاتصال k_0 [3,4]للبيان G. أي أن $1 \leq w \leq k_0$، وسوف نستبعد حالة كون w=1 من دراستنا لأنها تمثل المسافة الاعتيادية التي لها دراسات كثيرة ومتقدمة. أما لو كانت $w > k_0$ فان المسافة $d_w(u,v)$ تعد غير معرفة. عندما $w \neq 1$ فسوف نأخذ الرأسين u وv مختلفين ولا نأخذ حالة كون u =v.

يعرف **القطر–w** لبيان G والذي يرمز له بـ $diam_W(G)$ أو اختصارا بـ $\delta_w(G)$ أو δ_w بأنه أكبر المسافات العرضية–w قي G أي أن:

$$\delta_W(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_W(u,v\,|\,G) \qquad \text{.....(1.2)}$$

واضح أن $\delta_W(G) \geq \delta(G)$

أما **دليل وينر–w** فهو مجموع المسافات العرضية–w في البيان G أي:

$$W_W(G) = \sum_{u,v \in V} d_W(u,v\,|\,G) \qquad \text{.....(1.3)}$$

وأعماما لمتعددة حدود وينر نسبة الى الدالة المسافة الاعتيادية d [5,6] نعرف **متعددة حدود وينر–w** نسبة الى الدالة المسافة العرضية d_w كالأتي:

$$W_W(G;x) = \sum_{u,v \in V} x^{d_W(u,v)} \qquad \text{.....(1.4)}$$

فإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي تساوي المسافة العرضية–w بينها k فأن:

$$W_w(G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(G,k)\,x^k \qquad \ldots..(1.5)$$

لأنه عندما يكون $w\geq 2$ فان المسافة–w لا تقل عن 2.

من الواضح أن

$$W_w(G)=\frac{d}{dx}W_w(G;x)\Big|_{x=1}=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} k\,C_w(G,k) \qquad \ldots..(1.6)$$

ليكن v رأسا في بيان متصل G ولنفرض أن $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس G التي كل منها يبعد بمسافة عرضية–w تساوي k عن الرأس v إذ أن $k\geq 2$ و $w\geq 2$.

واضح أن

$$\sum_{v\in V} C_w(v,G,k)=2C_w(G,k) \qquad \ldots..(1.7)$$

لكل $2\leq k\leq \delta_w$

وتعرف **متعددة حدود وينر–w بالنسبة الى الرأس v** [1] بـ

$$W_w(v,G;x)=\sum_{k\geq 2}^{\delta_w} C_w(v,G,k)\,x^k \qquad \ldots..(1.8)$$

من (1.5) و(1.7) و(1.8) نستنتج أن [1]

$$\sum_{v\in V} W_w(v,G;x)=2W_w(G;x) \qquad \ldots..(1.9)$$

تعريف [1]: يقال لبيان متصل G أنه **منتظم نسبة الى المسافة العرضية–w** إذا كان لكل k، عرضية–

$C_w(v,G,k)$ له القيمة نفسها لكل رأس v في G. أي أن عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة w قيمتها k عن الرأس v هو نفسه بالنسبة الى كل v في G.

أوجدنا في هذا البحث متعددة وينر بالنسبة الالمسافة العرضية – w لكل من P_t^2, C_t^2, Q_m

2 . مربع درب (The square of a path)

تعريف 2.1: [3] المربع G^2 لبيان $G=(V,E)$ هو بيان مجموعة رؤوسه $V(G^2)=V(G)$ وفيه u وv متجاوران في G^2 عندما يكون $d(u,v)\leq 2$ في G. بالمثل يعرف G^m، $m\geq 3$، كالآتي $V(G^m)=V(G)$ ويكون الرأسان u و v متجاورين في G^m فقط عندما يكون

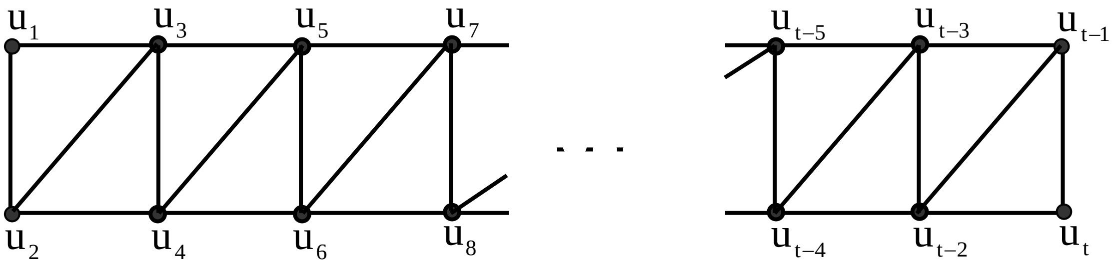
$$d_G(u,v) \le m$$

نجد في هذا البند متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−w لمربع درب. نفرض أن P_t درب برتبة t مجموعة رؤوسه هي بالترتيب $u_1,u_2,u_3,...,u_t$ ،عندئذ يكون

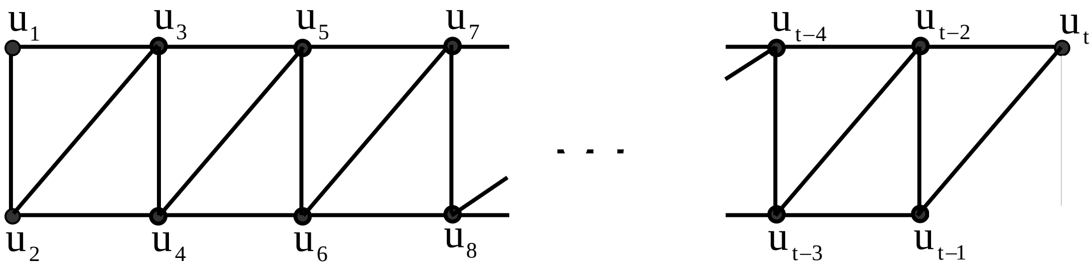
$$V(P_t^2) = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_t\} = V$$

$$E(P_t^2) = \{uv: u,v \in V, 1 \le d_G(u,v) \le 2\}, G = P_t$$

الشكل 2.1 يوضح البيان P_t^2 عندما يكون t عددا زوجيا، والشكل 2.2 يبين لنا P_t^2 عندما يكون t عددا فرديا.



الشكل 2.1−البيان P_t^2 ، t عدد زوجي



الشكل 2.2−البيان P_t^2 ، t عدد فردي

بمجرد النظر إلى الشكلين 2.1 و 2.2 يتبين لنا أن $k_0 = 2$ وهذا يعني أن w =2.

عبارة 2.1: القطر للمسافة العرضية−2 للبيان P_t^2 هو

$$diam_2 P_t^2 = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \qquad .....(2.1)$$

البرهان:

من الشكل 2.1 نلاحظ أن $d_2(u,v) \le t/2$ عندما يكون t عددا زوجيا، وأن $d_2(u_1,u_t) = t/2$. إذا عندما يكون t زوجيا فان $diam_2 P_t^2 = \frac{t}{2}$.

ومن الشكل 2.2 نلاحظ أن لكل رأسين u و v يكون

عندما يكون t فرديا $d_2(u,v) \le (t+1)/2$,

كما أن $d_2(u_1,u_t) = (t+1)/2$. وعليه، فانه عندما يكون t فرديا فان

$$diam_2 P_t^2 = (t+1)/2$$

#

مبرهنة 2.2: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 للبيان P_t^2 ، إذ أن $t \ge 5$ ، هي:

$$W_2(P_t^2;x) = 3(t-2)x^2 + \sum_{k=3}^{\lceil t/2 \rceil}(2t-4k+3)x^k \qquad \ldots..(2.2)$$

البرهان:

للحصول على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 نجد معامل x^k ، أي $C_2(P_t^2,k)$ لكل $2 \le k \le \lceil t/2 \rceil$.

نفرض أن k =2 ولنأخذ الرأس u_i مع كل رأس من الرؤوس u_j حيث أن $i < j \le t$ نلاحظ أن $d_2(u_i,u_j) = 2$ عندما $j = i+1, i+2, i+3$ ولكل $1 \le i \le t-3$.

فضلا عن أن

$$d_2(u_{t-2},u_{t-1}) = d_2(u_{t-2},u_t) = d_2(u_{t-1},u_t) = 2 \qquad \ldots..(2.3)$$

وبهذا نستنتج أن

$$C_2(P_t^2,2) = 3(t-2) \qquad \ldots..(2.4)$$

أما إذا كانت $3 \le k \le \lceil t/2 \rceil$ ولغرض إيجاد $C_2(P_t^2,k)$ فنلاحظ أن $d_2(u_i,u_j) = k$ إذا وإذا فقط كان $j = i+2k-2, i+2k-1$.

وهذا يصح لكل $1 \le i \le t+1-2k$ ، فضلا عن أن:

$$d_2(u_{t+2-2k},u_t) = k \qquad \ldots..(2.5)$$

ومما تقدم تبين أن لكل $3 \le k \le \lceil t/2 \rceil$

$$C_2(P_t^2,k) = 2t-4k+3 \qquad \ldots..(2.6)$$

وأخيرا نحصل من (2.4) و(2.6) على (2 .2) وبهذا يتم البرهان.

#

نتيجة 2.3: دليل وينر للمسافة العرضية−2 للبيان P_t^2 هو

$$\mathrm{W}_2(\mathrm{P}_t^2) = \mathrm{tn}(\mathrm{n}+1) - \frac{1}{6}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(8\mathrm{n}-5) - 1 \qquad \ldots..(2.7)$$

حيث أن $n = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$.

البرهان:

باشتقاق الصيغة (2.2) والتعويض عن x=1 نحصل على العلاقة (2.7).

3. مربع دارة C_t^2 (The square of a cycle):

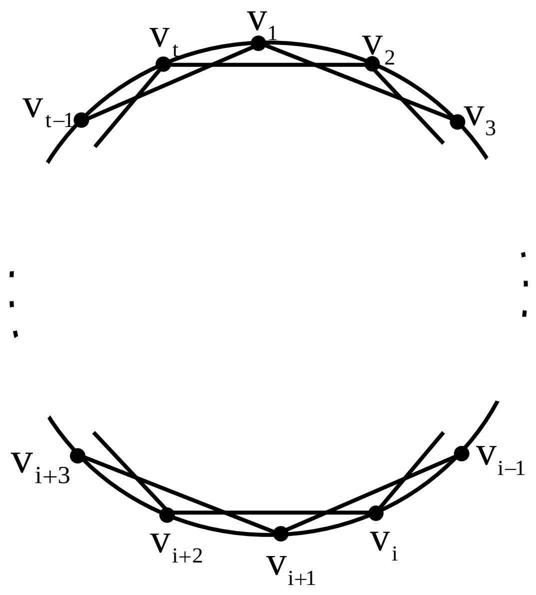
بما أن $C_4^2 = K_4$ و $C_5^2 = K_5$ فسوف نفرض أن $t \geq 6$.

من الواضح أن عامل الاتصال k_0 للبيان C_t^2 هو 4 لذلك فان $2 \leq w \leq 4$. لنفرض مجموعة رؤوس C_t^2 هي:

$V(C_t^2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$

كما هو مبين في الشكل3.1.

لاحظ أن C_t^2 يكون منتظما بالنسبة الى المسافة العرضية-w لذا سنركز على إيجاد متعددة الحدود $W_w(v_1, C_t^2; x)$ لكل $2 \leq w \leq 4$.



الشكل3.1 البيان C_t^2

(أولاً) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان C_t^2 :

عبارة3.1: القطر للمسافة العرضية−2 للبيان C_t^2 هو

$$diam_2 C_t^2 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

البرهان:

يكن u و v رأسين من رؤوس C_t^2 بحيث أن $d(u,v|C_t)=r$ هو القطر للبيان C_t. وليكن Q هو أقصر درب بين u و v في البيان C_t. لدينا أربع حالات:

1. إذا كان t=4s عندها يكون r=2s وتتجزأ حافات C_t إلى دربين u-v منفصلين داخليا هما Q و Q' وعليه يوجد دربان u-v منفصلان داخليا في البيان C_t^2 كل منهما بطول s.
أحدهما في Q^2 والأخر في Q'^2 [لاحظ العبارة2.1]لهذا السبب فان

$$diam_2 C_t^2 = s = \frac{t}{4} = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

2. إذا كان t=4s+1 فان $d(u,v|C_t)=2s$. إذا يوجد دربان u-v منفصلان داخليا في Q^2 أحدهما بطول s والآخر بطول s+1 ولما كانت رتبة Q هي 2s+1 فان $diam_2 Q^2 = s+1$ ولما كان Q′ برتبة 2s+2 فانه لا يؤدي إلى دربين منفصلين داخليا بين u و v وبطول أقل من s+1. لذلك فان

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

3. إذا كان t=4s+2 فان الدرب Q يكون برتبة 2s+2 ويكون Q' أيضا برتبة 2s+2 وكل منهما يؤدي إلى أقصر درب u-v في Q^2 و Q'^2 وبطول s+1 (بموجب العبارة 2.1) وهذه الحالة مشابهة للحالة الأولى. وهكذا يكون

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

4. إذا كان t=4s+3 فان $d(u,v|C_t)=2s+1=r$ ويكون Q برتبة 2s+2 أما Q′ فيكون برتبة 2s+3، لذلك نأخذ الدربين u-v المنفصلين داخليا من Q^2 اللذين يؤديان إلى حاوية C(u,v) بأقصر طول. ولما كان $diam_2 Q^2 = s+1$ فان

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

وبهذا يتم البرهان. #

وسوف نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−w للبيان C_t^2 لكل من القيم الثلاثة لـ w وهي 2,3,4

مبرهنة3.2: لتكن $t\geq 7$ ولنفرض أن $m=\left\lfloor\frac{t-7}{4}\right\rfloor$ ، $n=t-3-4\left\lfloor\frac{t-3}{4}\right\rfloor$ ،
فان متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−2 لمربع دارة C_t^2 ،هي:

$$W_2(C_t^2;x)=t\,x^2+2t\sum_{k=2}^{m+2}x^k+\begin{cases}0 & ,when\ n=0\\ t\,x^{m+2}/2 & ,\ when\ n=1\\ t\,x^{m+3} & ,when\ n=2\\ 3t\,x^{m+3}/2 & ,when\ n=3\end{cases}$$

البرهان:

بما أن C_t^2 منتظم بالنسبة إلى المسافة العرضية−w، أي أن لكل k، يكون لـ $C_w(v,C_t^2,k)$ القيمة نفسها لكل رأس v في C_t^2 ، لذلك فان:

$$W_2(C_t^2;x)=\frac{1}{2}tW_2(v_1,C_t^2;x), \qquad .....(3.1)$$

نلاحظ من الشكل 3.1 أن:

$$d_2(v_1,v_i)=2$$

عندما يكون $i=2,3,4,t-2,t-1,t$ ، وعليه فان

$$C_2(v_1,C_t^2,2)=6 \qquad .....(3.2)$$

باستثناء الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية−2 مقدارها2 عن v_1 ، نجد أن الرؤوس المتبقية يمكن أن تجزأ إلى m من المجاميع التي يتكون كل منها من أربعة رؤوس لها المسافة العرضية− 2 ذاتها عن v_1 . ومسافاتها العرضية تتدرج تصاعديا من 3 إلى m+2. بعبارة أخرى لكل k، حيث $3\leq k\leq m+2$ ولقيم i، $5\leq i\leq t-3$ ، فان $d_2(v_1,v_i)=k$ عندما يكون $i=2k-1,2k,t-2k+2,t-2k+3$ وعليه فان

$$C_2(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.3)$$

أخيرا بقي لدينا إيجاد المسافة العرضية−2 بين v_1 و n من الرؤوس المتبقية، وواضح أن قيم n الممكنة هي: n =0,1,2, or 3.

فإذا كان n=0 فلا يوجد رأس باق.

وإذا كان n=1 يبقى رأس واحد وهو الرأس $v_{t/2+1}$ ، وأن

$$d_2(v_1,v_{t/2+1})=m+2 \qquad .....(3.4)$$

إذا كان n=2 فيبقى رأسان وهما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ ، وأن

$$d_2(v_1,v_{(t+1)/2})=d_2(v_1,v_{(t+3)/2})=m+3 \qquad .....(3.5)$$

إذا كان n=3 يبقى ثلاثة رؤوس وهي $v_{t/2+2}$ ، $v_{t/2+1}$ و $v_{t/2}$ ، وأن

$$d_2(v_1,v_{t/2})=d_2(v_1,v_{t/2+1})=d_2(v_1,v_{t/2+2})=m+3 \qquad .....(3.6)$$

مما تقدم في العلاقات (3.2)،(3.3)،(3.4)،(3.5) و(3.6) نحصل على الصيغة الآتية لأجل $t\geq 7$.

$$W_2(v_1,C_t^2;x)=2x^2+4\sum_{k=2}^{m+2}x^k+\begin{cases}0 & ,when\ n=0\\ x^{m+2} & ,\ when\ n=1\\ 2x^{m+3} & ,when\ n=2\\ 3x^{m+3} & ,when\ n=3\end{cases}$$

وبالرجوع إلى (3.1) نحصل على صيغة $W_2(C_t^2;x)$ المذكورة في المبرهنة.

#

وبالنسبة الى قيم $3\leq t\leq 6$ ، فان $C_3^2=K_3$ و $C_4^2=K_4$ و $C_5^2=K_5$ أما إذا كان $t=6$ فنجد مباشرة أن

$$W_2(C_6^2;x)=15x^2$$

نتيجة3.3: دليل وينر للمسافة العرضية-2، للبيان C_t^2 هو:

$$W_2(C_t^2)=t(m^2+5m+6+\alpha)$$

حيث أن

$$\alpha=\begin{cases}0 & ,when\ n=0\\ (m+2)/2 & ,\ when\ n=1\\ m+3 & ,when\ n=2\\ 3(m+3)/2 & ,when\ n=3\end{cases}$$

$$m=\left\lfloor\frac{t-7}{4}\right\rfloor.\ \ n=t-3-4\left\lfloor\frac{t-3}{4}\right\rfloor \ ،$$

#

(ثانيا) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 :

العبارة الآتية تعطينا القطر للمسافة العرضية-2 للبيان C_t^2 .

العبارة 2.4: القطر الى المسافة العرضية−3 للبيان C_t^2 ، $t \geq 6$ ، هو

$$diam_3 C_t^2 = \begin{cases} t/2-1, & when\, t\, is\, even \\ (t-1)/2, & when\, t\, is\, odd \end{cases} \quad .....(3.7)$$

البرهان:

بما أن C_t^2 منتظم بالنسبة للمسافة العرضية ، فإننا نلاحظ من الشكل 3.1 أن

$$diam_3 C_t^2 = \max_{u \in V} \{d_3(v_1, u)\} = d_3(v_1, v_3)$$

أصغر حاوية $C(v_1, v_3)$ تتكون من الدروب

$P_1 = v_1 v_3$, $P_2 : v_1, v_2, v_3$, $P_3 : v_1, v_{t-1}, v_{t-3}, v_{t-5}, \dots v_5, v_3$.

إذا كان t عددا زوجيا، وبذلك فان طول هذه الحاوية هو $t/2-1$.

أما إذا كان t عددا فرديا فان أصغر حاوية $C(v_1, v_3)$ تتكون من الدروب P_1 ، P_2 و $P'_3 : v_1, v_t, v_{t-2}, v_{t-4}, \dots, v_5, v_3$ الذي طوله $(t-1)/2$ ، لذلك فان طول هذه الحاوية هو $(t-1)/2$.

وبذلك يتم البرهان. #

والآن نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية−3 للبيان C_t^2 . ونأخذ لأجل ذلك حالتين في حالة كون t عددا زوجيا أو t عددا فرديا.

مبرهنة3.5: إذا كان t عددا زوجيا و $t \geq 8$ ، وليكن $n = t - 3 - 4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$ ، فان

$$W_3(C_t^2; x) = t\,x^2 + \begin{cases} 2t \sum_{k=t/4+1}^{t/2-1} x^k + \frac{t}{2} x^{t/4+1}, & when\, n = 1 \\ 2t \sum_{k=(t+6)/4}^{t/2-1} x^k + \frac{3}{2} t\, x^{(t+2)/4}, & when\, n = 3 \end{cases}$$

البرهان:

من الواضح أن $d_3(v_1, v_2) = d_3(v_1, v_t) = 2$

أما القطر الذي هو $t/2-1$ فانه يتحقق لأزواج الرؤوس المكونة من v_1 مع كل من $v_{t-2}, v_{t-1}, v_4, v_3$. وبذلك فان

$C_3(v_1, C_t^2, 2) = 2$, $C_3(v_1, C_t^2, t/2-1) = 4$.

بما أن t عدد زوجي فان باقي قسمة $t-3$ على 4 هو 1 أو 3، أي أن n=1,3. وبذلك نعالج حالتين:

(أ) فإذا كان t من مضاعفات العدد 4 فان n=1، وفي هذه الحالة يكون $d_3(v_1,v_i)$ لكل $i=3,4,5,\ldots,t/2$، كالأتي:

$$d_3(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+1)/2\,, & when\ i\ is odd & \ldots.(3.8)\\ (t-i+2)/2\,, & when\ i\ is even & \ldots..(3.9)\end{cases}$$

كما أن لكل $i=3,4,5,\ldots,t/2$،

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad \ldots..(3.10)$$

نلاحظ من (3.8) و (3.9) أنه إذا كان i فرديا، $3\le i\le t/2$، فان

$$d_3(v_1,v_i)=d_3(v_1,v_{i+1})$$

ومن (3.10) أيضا نلاحظ أن كل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-1},v_{t-2},v_{t-3},\ldots,v_{t/2+2}$ يكون لهما المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1. وبهذا يكون لكل k، $t/4+1\le k\le t/2-1$، فانه توجد أربعة رؤوس لها المسافة العرضية- 3عن v_1 هي k، وعليه يكون

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4\,,\quad t/4+1\le k\le t/2-1 \qquad \ldots..(3.11)$$

فضلا عن ذلك فان

$$d_3(v_1,v_{t/2+1})=t/4+1 \qquad \ldots..(3.12)$$

وبهذا يتم حساب المسافة العرضية-3 من v_1 إلى كل الرؤوس الأخرى في C_t^2 عندما n=1.

(ب) إذا كان n=3 فان العدد t ليس من مضاعفات العدد 4، وأن العلاقتين (3.8) و(3.9) تصحان لقيم i الآتية: $i=3,4,5,\ldots,t/2-1$.

وأيضا يكون لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، حيث $i=3,5,7,\ldots,t/2-2$، المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1،

كما أن:

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad \ldots..(3.13)$$

لكل $3\le i\le t/2-1$.

كما أن كل رأسين متتاليين في المتتابعة $v_{t-1},v_{t-2},\ldots,v_{t/2+3}$ لهما المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1. وبذلك فان لكل $(t+6)/4\le k\le t/2-1$ نحصل على

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4$$

الرؤوس الباقية وهي الثلاثة الآتية $v_{t/2}$ ، $v_{t/2+1}$ و $v_{t/2+2}$. ونجد من الشكل3.1 أن:

$$d_3(v_1,v_{t/2})=d_3(v_1,v_{t/2+1})=d_3(v_1,v_{t/2+2})=(t+2)/4$$

وبتلخيص ما تقدم نحصل على:

$$W_3(v_1,C_t^2;x)=2x^2+\begin{cases}4\sum_{k=t/4+1}^{t/2-1}x^k+x^{t/4+1}\ , & when\, n=1\\ 4\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2-1}x^k+3x^{(t+2)/4}\ , & when\, n=3\end{cases}$$

وبالضرب في t/2 نحصل على $W_3(C_t^2;x)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة 3.5.

#

نتيجة3.6: إذا كان t عددا زوجيا و $t\geq 8$ ، وليكن $n=t-3-4\left\lfloor\frac{t-3}{4}\right\rfloor$ ، فان دليل وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 هو

$$W_3(C_t^2)=\begin{cases}\frac{t}{4}(\frac{3}{4}t^2-\frac{5}{2}t+10)\ , & when\, n=1\\ \frac{t}{4}(\frac{3}{4}t^2-\frac{5}{2}t+8)\ , & when\, n=3\end{cases}$$

#

والآن نجد $W_3(C_t^2;x)$ عندما يكون t عددا فرديا.

مبرهنة3.7: إذا كان t عددا فرديا، $t\geq 9$ ، وليكن $n=t-5-4\left\lfloor\frac{t-5}{4}\right\rfloor$ فان:

$$W_3(C_t^2;x)=t\,x^2+t\,x^{(t-1)/2}+\begin{cases}2t\sum_{k=(t+3)/4}^{(t-3)/2}x^k\ , & when\, n=0\\ 2t\sum_{k=(t+5)/4}^{(t-3)/2}x^k+t\,x^{(t+1)/4}\ , & when\, n=2\end{cases}$$

البرهان:

من الواضح أن هنالك رأسين فقط هما v_2 و v_t بحيث أن

$$d_3(v_1,v_2)=d_3(v_1,v_t)=2$$

وعليه فان

$$C_3(v_1,C_t^2,2)=2 \qquad \ldots\ldots(3.14)$$

بالنسبة الى قطر المسافة العرضية−3 للبيان C_t^2 الذي قيمته $(t-1)/2$ بموجب العبارة3.4 فان هنالك رأسين فقط هما v_3 و v_{t-1} بحيث أن

$$d_3(v_1,v_3)=d_3(v_1,v_{t-1})=(t-1)/2$$

وعليه فان

$$C_3(v_1,C_t^2,(t-1)/2)=2 \qquad .....(3.15)$$

حالتان:

وواضح أن باقي قسمة $t-5$ على 4 أي n هو 2 أو 0 لأن t عدد فردي. وبذلك تكون لدينا

(أ) عندما $n=0$ وهي تتحقق عندما تكون $(t-1)$ من مضاعفات العدد 4 وفي هذه الحالة تكون المسافة العرضية−3 لكل $4\le i\le (t+1)/2$ كالأتي:

$$d_3(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+1)/2, & 4\le i\le (t-1)/2 \quad \text{when } i \text{ is even}\\ (t-i+2)/2, & 5\le i\le (t+1)/2 \quad \text{when } i \text{ is odd}\end{cases} \qquad .....(3.16)$$

ومنها نجد أن كل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، $i=4,6,8,\dots,(t-1)/2$، تكون لهما المسافة العرضية−3 نفسها عن v_1.

وبالمقابل فان لكل $4\le i\le (t+1)/2$

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad .....(3.17)$$

كما يكون لكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-2},v_{t-3},\ \dots\ ,v_{(t+3)/2}$ المسافة العرضية−3 نفسها عن v_1.

أي أن لكل k، حيث أن $(t+3)/4\le k\le (t-3)/2$، يكون

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.18)$$

(ب) عندما $n=2$ أي أن $(t-1)$ ليس من مضاعفات العدد 4 فان العلاقة (3.16) تصح حسب قيم i الآتية: $i=4,5,6,\dots,(t-1)/2$.

كما نلاحظ أن

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad .....(3.19)$$

وهذه تعني أن كل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-2},v_{t-3},\ \dots\ ,v_{(t+5)/2}$ يكون لهما المسافة العرضية−3 نفسها عن v_1.

أي أن لكل k حيث أن $(t+5)/4\le k\le (t-3)/2$، فان

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.20)$$

أما الرأسان الباقيان فانهما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ وأن مسافتهما العرضية-3 عن v_1 هي:

$$d_3(v_1, v_{(t+1)/2}) = d_3(v_1, v_{(t+3)/2}) = (t+1)/4 \qquad .....(3.21)$$

إذا

$$C_3(v_1, C_t^2, (t+1)/4) = 2$$

مما تقدم وحسب ما ذكر في الفقرتين (أ) و (ب) نحصل على ما يأتي:

$$W_3(v_1, C_t^2; x) = 2x^2 + 2x^{(t-1)/2} + \begin{cases} 4\sum\limits_{k=(t+3)/4}^{(t-3)/2} x^k \,, & when \;\; n=0 \\ 4\sum\limits_{k=(t+5)/4}^{(t-3)/2} x^k + 2x^{(t+1)/4}, & when \;\; n=2 \end{cases} \qquad .....(3.22)$$

وبضرب (3.22) في t/2 نحصل على $W_3(C_t^2; x)$ المذكورة في نص المبرهنة 3.7.

#

لاحظ أنه عندما t=7 يكون لدينا:

$$W_3(C_7^2; x) = 14x^2 + 7x^3$$

نتيجة3.8: إذا كان t عددا فرديا، $t \ge 9$، وكان $n = t - 5 - 4\left\lfloor \frac{t-5}{4} \right\rfloor$، فان دليل وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 هو

$$W_3(C_t^2) = \begin{cases} t(3t^2 - 10t + 39)/16, & when\, n = 0 \\ t(3t^2 - 10t + 35)/16, & when\, n = 2 \end{cases}$$

#

(ثالثا) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-4 للبيان C_t^2:

والان نعالج حالة كون w =4 أي نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-4 للبيان C_t^2.

عبارة3.9: لكل $t \ge 6$،

$$diam_4 C_t^2 = \begin{cases} t/2, & when\; t \;\; is \;\; even \\ (t-1)/2\,, & when\; t \;\; is \;\; odd \end{cases}$$

البرهان:

واضح من الشكل3.1 أنه عندما يكون t عددا زوجيا، فان:

$$d_4(v_1, v_3) = t/2$$

وعندما يكون t عددا فرديا فان أكبر مسافة عرضية-4 من v_1 هي إلى الرأس v_3 أيضا ويكون طول الحاوية لها هو $(t-1)/2$.

#

لغرض إيجاد $W_4(C_t^2;x)$ نأخذ حالتين الأولى عندما يكون t عددا زوجيا والثانية عندما يكون t عددا فرديا.

مبرهنة3.10: إذا كان t عددا زوجيا، $t \geq 6$، ولنفرض أن $n=(t-1)-4\left\lfloor \frac{t-1}{4} \right\rfloor$، فان

$$W_4(C_t^2;x)=\begin{cases} 2t\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2} x^k+\frac{t}{2}x^{(t+2)/4}\ , & when\ \ n=1 \\ 2t\sum_{k=t/4+2}^{t/2} x^k+\frac{3}{2}t\,x^{t/4+1}, & when\ \ n=3 \end{cases}$$

البرهان:

واضح أن n هو باقي قسمة $t-1$ على 4، ونظرا لكون t عددا زوجيا فان $n=1$ أو $n=3$. سوف نعالج كلا من الحالتين على حده.

(أ) إذا كان n=1 فان t ليس من مضاعفات العدد 4. ولكل $2 \leq i \leq t/2$، فان

$$d_4(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+2)/2,\ \ 2\leq i\leq t/2-1\ , & when\ \ i\ \ is\ \ even \\ (t-i+3)/2\ ,\ \ 3\leq i\leq t/2, & when\ \ i\ \ is\ \ odd\end{cases} \quad .....(3.23)$$

ومنها نجد أن لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، $i=2,4,6,\ldots,t/2-1$، المسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1، كما نجد أن

$$d_4(v_1,v_{t-i+2})=d_4(v_1,v_i)$$

إذ $2\leq i\leq t/2$.

كما يكون لكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_t,v_{t-1},v_{t-2},\ldots,v_{t/2+2}$ المسافة العرضية-4 نفسها عن v_1، وبهذا لكل k، حيث $(t+6)/4\leq k\leq t/2$ فان

$$C_4(v_1,C_t^2,k)=4 \quad .....(3.24)$$

والرأس المتبقي هو $v_{t/2+1}$ ومسافته العرضية-4 عن v_1 هي:

$$d_4(v_1,v_{t/2+1})=(t+2)/4 \quad .....(3.25)$$

وبهذا وجدنا المسافات العرضية-4 من الرأس v_1 إلى باقي رؤوس C_t^2 كلها.

(ب) عندما n=3 فان t من مضاعفات العدد 4 وأن العلاقة (3.23) تتحقق لقيم i الآتية: $i=2,3,4,\ldots,t/2-1$

تكون المسافتان العرضيتان -4 عن v_1 لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، حيث أن $i=2,4,6,\ldots,t/2-2$، متساويتين أيضا.

كما أن $2\leq i\leq t/2-1$ و $d_4(v_1,v_{t-i+2})=d_4(v_1,v_i)$

وكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \ldots, v_{t/2+3}$ لهما المسافة العرضية−4 نفسها عن v_1 ، وبهذا لكل k، $\frac{t}{4}+2 \le k \le t/2$ ، توجد أربعة رؤوس بالمسافة العرضية−4 بقيمة k عن v_1 أما الرؤوس الثلاثة الباقية وهي: $v_{t/2}, v_{t/2+1}, v_{t/2+2}$. فان لها

$$d_4(v_1, v_{t/2}) = d_4(v_1, v_{t/2+1}) = d_4(v_1, v_{t/2+2}) = t/4+1$$

وبتلخيص ما تقدم ينتج

$$W_4(v_1, C_t^2; x) = \begin{cases} 4\displaystyle\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2} x^k + x^{(t+2)/4}\ , & when\ \ n=1 \\ 4\displaystyle\sum_{k=t/4+2}^{t/2} x^k + 3\ x^{t/4+1}, & when\ \ n=3 \end{cases} \qquad \ldots..(3.26)$$

وبضرب (3.26) في t/2 نحصل على $W_4(C_t^2; x)$المذكورة في المبرهنة (3.10) وبهذا يتم البرهان #

مبرهنة3.11: إذا كان t عددا فرديا، $t \ge 7$ ، ولتكن $n = (t-3) - 4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$ ، فان

$$W_4(C_t^2; x) = t\,x^{(t-1)/2} + \begin{cases} 2t\displaystyle\sum_{k=(t+5)/4}^{(t-1)/2} x^k\ , & when\ \ n=0 \\ 2t\displaystyle\sum_{k=(t+7)/4}^{(t-1)/2} x^k + t\,x^{(t+3)/4}, & when\ \ n=2 \end{cases}$$

البرهان:

بما أن t عدد فردي فان قيمة القطر هي $(t-1)/2$. وهي تتحقق لستة أزواج من الرؤوس من ضمنها زوجان مكونان من v_1 مع كل من الرأسين v_2 و v_t أي أن

$$d_4(v_1, v_2) = d_4(v_1, v_t) = (t-1)/2$$

أما الأزواج الأربعة المتبقية فان كلا منها مكون من v_1 مع أحد الرؤوس $v_3, v_4, v_{t-1}, v_{t-2}$ التي سوف تذكر ضمن الفقرتين (أ) و(ب). إن باقي قسمة $t-3$ على 4 الذي هو n يكون له قيمتان إما 0 أو2 وسنعالج كل حالة منهما.

(أ) إذا كان n=0 فان $t-1$ ليس من مضاعفات العدد 4 عندئذ يكون:

$$d_4(v_1, v_i) = \begin{cases} (t-i+2)/2, & 3 \le i \le (t-1)/2,\ when\ \ i\ \ is\ \ odd \\ (t-i+3)/2\ , & 4 \le i \le (t+1)/2,\ when\ \ i\ \ is\ \ even \end{cases} \qquad \ldots..(3.27)$$

حسب ما ذكر في العلاقة (3.27) نجد أن كل رأسين متتالين v_i و v_{i+1} ، $i = 3,5,7, \ldots, (t-1)/2$ تكون لهما المسافة العرضية−4 نفسها عن v_1 .

كما أن

$$d_4(v_1,v_{t-i+2}) = d_4(v_1,v_i)$$

حيث أن $3 \le i \le (t+1)/2$. وكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{(t+3)/2}$ لهما المسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1، وبهذا يكون لكل k، $(t+5)/4 \le k \le (t-1)/2$ ، فان

$$C_4(v_1, C_t^2, k) = 4 \qquad \text{.....(3.28)}$$

عندها نكون قد وجدنا المسافات العرضية-4 للرأس v_1 نسبة إلى كل من الرؤوس الأخرى لـ C_t^2 عندما n =0.

(ب) إذا كان n=2 فان $t-1$ من مضاعفات العدد 4 وأن

$$d_4(v_1,v_i) = \begin{cases} (t-i+2)/2, & 3 \le i \le (t-3)/2, \text{ when } i \text{ is odd} \\ (t-i+3)/2, & 4 \le i \le (t-1)/2, \text{ when } i \text{ is even} \end{cases}$$

كما يكون فيها لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1} ، حيث $i = 3,5,7,\dots,(t-3)/2$ ، المسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1 ، كما نجد أن

$$d_4(v_1,v_{t-i+2}) = d_4(v_1,v_i)$$

حيث $3 \le i \le (t-1)/2$ ،

إذا كل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{(t+5)/2}$ ، لهما المسافة العرضية-4 نفسها عن v_1 .

وبهذا فان لكل k، $(t+7)/4 \le k \le (t-1)/2$ ، يكون

$$C_4(v_1, C_t^2, k) = 4 \qquad \text{.....(3.29)}$$

والرأسان الباقيان هما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ وان مسافتهما عن v_1 هي

$$d_4(v_1, v_{(t+1)/2}) = d_4(v_1, v_{(t+3)/2}) = (t+3)/4 \qquad \text{.....(3.30)}$$

أخيرا وبتلخيص ما تقدم في الفقرتين (أ) و (ب) نحصل على:

$$W_4(v_1, C_t^2; x) = 2x^{(t-1)/2} + \begin{cases} 4 \sum_{k=(t+5)/4}^{(t-1)/2} x^k, & \text{when } n=0 \\ 4 \sum_{k=(t+7)/4}^{(t-1)/2} x^k + 2x^{(t+3)/4}, & \text{when } n=2 \end{cases} \qquad \text{.....(3.31)}$$

وبضرب العلاقة (3.31) في t/2 نحصل على $W_4(C_t^2;x)$ المذكورة ضمن نص المبرهنة3.11 .

#

نتيجة3.12:

(أ) لأجل $t \geq 6$ ، t عدد زوجي، ولتكن $n = (t-1) - 4\left\lfloor \frac{t-1}{4} \right\rfloor$ ، فان

$$W_4(C_t^2) = t(3t^2 + 2t - 8)/16,$$

وهذه العلاقة عندما n=1,3.

(ب) لأجل $t \geq 7$ ، t عدد فردي، ولتكن $n = (t-3) - 4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$ ، فان

$$W_4(C_t^2) = \begin{cases} t(3t^2 + 2t - 17)/16, & when\ n = 0 \\ t(3t^2 + 2t - 21)/16, & when\ n = 2 \end{cases}$$

#

4. مكعب−m (m-Cube):

يعرف المكعب−m والذي يرمز له Q_m باسلوب تكراري كالآتي [4]: $Q_1 = K_2$ و $Q_m = Q_{m-1} \times K_2$ لأجل $m \geq 2$. ويمكن بسهولة ملاحظة أن $p(Q_m) = 2^m$ ، $q(Q_m) = m2^{m-1}$ ، كما أنه منتظم بدرجة m. إضافة إلى ذلك فان عامل الاتصال للرؤوس وكذلك للحافات للمكعب Q_m هو m، وبذلك فان هنالك m من الدروب المنفصلة داخليا بين كل رأسين مختلفين. وبناء على ذلك سوف نفرض فيما يأتي $2 \leq w \leq m$. من المفيد التعبير عن رؤوس Q_m بمتتابعات−m في النظام الثنائي $(a_1 a_2\ \ldots\ a_m)$ حيث أن a_i هو 0 أو1 لكل $1 \leq i \leq m$. وعندئذ يكون رأسان في Q_m متجاورين إذا وإذا فقط اختلف التمثيل الثنائي لهما بموقع واحد فقط. أي أن $(a_1 a_2\ \ldots\ a_m)$ و $(b_1 b_2\ \ldots\ b_m)$ متجاوران إذا وفقط إذا كان $a_i \neq b_i$ لقيمة واحدة فقط ل i وفيما عدا ذلك فان $a_j = b_j$ لكل $j \neq i$.

عبارة4.1: إذا كان $u,v \in V(Q_m)$ بحيث أن التمثيل الثنائي لـ u و v يختلف بـ n من المواقع، فان $d(u,v) = n$.

البرهان:

إذا كان u و v يختلفان بـ n من المواقع في التمثيل الثنائي للرؤوس فان هنالك دربا u-v بطول n. إذا $d(u,v) \leq n$ ومن جهة أخرى، إذا كان Q أقصر درب بين u و v وكان $Q: u, u_1, u_2, \ldots, u_t (= v)$ فان كل رأسين متتالين على Q يختلفان بموقع واحد فقط، وبذلك فان u

و v يختلفان بـ t من المواقع، إذا $d(u,v)=t$، لأن Q أقصر درب وطوله t. وعليه، فان $d(u,v)=t=n$.

#

مبرهنة 4.2: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ وكان $d(u,v)=t$ فان هنالك t من الدروب u-v المنفصلة داخليا وكل منها بطول t.

البرهان:

ليكن $u=(a_1\,a_2\ \dots\ a_m)$ و $v=(b_1\,b_2\ \dots\ b_m)$ بما أن $d(u,v)=t$ فانه بموجب العبارة 4.1 يوجد t من الأدلة j بحيث أن $a_j\neq b_j$، ولنرمز لهذه الأدلة بـ $r_1,r_2,\dots,r_t$ بحيث أن $r_1<r_2<\dots<r_t$، أي أن

$$a_{r_i}\neq b_{r_i}\ ,\ i=1,2,\dots,t$$
$$a_k=b_k\ ,\ \forall k\notin\{r_1,r_2,\dots,r_t\}.$$

ليكن $u_j^{(1)}$ هو الرأس الذي نحصل عليه من u بتغيير قيم المواقع $r_1,r_2,\dots,r_j$، حيث أن $j=1,2,\dots,t$ إذا $Q_1:u,u_1^{(1)},u_2^{(1)},\dots,u_t^{(1)}(=v)$ هو درب u-v بطول t ولنرمز بـ $u_j^{(2)}$ للرأس الناتج من u بتغيير قيم أول j (ابتداء من اليسار) من $r_2,r_3,\dots,r_t,r_1$.

وواضح أن الدرب $Q_2:u,u_1^{(2)},u_2^{(2)},\dots,u_t^{(2)}(=v)$ هو بطول t بين u و v ومنفصل داخليا عن Q_2.

وهكذا نستمر بإيجاد Q_3 الذي يتكون من الرؤوس $u,u_1^{(3)},u_2^{(3)},\dots,u_t^{(3)}(=v)$ حيث أن $u_j^{(3)}$ هو الرأس الناتج من u بتغيير قيم أول j (ابتداء من اليسار) من المتتابعة $r_3,r_4,\dots,r_t,r_1,r_2$. واضح أن Q_3 بطول t أيضا وهو منفصل داخليا مع Q_1 و Q_2.

وبالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على t من الدروب u-v المنفصلة داخليا وكل منها بطول t. وبهذا يتم البرهان.

#

نحصل على النتيجة الآتية من المبرهنة4.2 مباشرة.

نتيجة4.3: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ بحيث أن $d(u,v)=t$، حيث $1\le t\le m$، فان المسافة العرضية-t للرأسين u و v هي t، أي $d_t(u,v)=t$.

#

مبرهنة4.4: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ بحيث أن $d(u,v)=t$، حيث $1\le t<m$، فان هنالك m-t من الدروب u-v المنفصلة داخليا والتي كل منها بطول t+2.

البرهان:

نستخدم الرموز التي ذكرت في برهان المبرهنة4.2.

لنفرض أن k_1 هو أول موقع في u وكذلك في v بحيث أن $a_{k_1} = b_{k_1}$. وليكن u' هو u مع تغيير قيمة العنصر في الموقع k_1 (أي إذا كان 0 يغير إلى 1، وبالعكس)

واضح أن $d(u',v) = t+1$. إذا يوجد درب u'-v ، Q' بطول t+1 نحصل عليه بأخذ الرؤوس بالترتيب

$$Q'_1 : u', u'^{(1)}_1, u'^{(1)}_2, \dots, u'^{(1)}_t, u'^{(1)}_{t+1}$$

حيث أن $u'^{(1)}_j$ نحصل عليه من u' بتغيير قيم الموقع $r_1, r_2, \dots, r_j$ ، لكل $1 \le j \le t$ وأن $u'^{(1)}_{t+1}$ نحصل عليه من $u'^{(1)}_t$ بتغيير قيمة الموقع k_1 في u' أي إعادته إلى قيمة هذا الموقع الأصلي عندما كانت في u. وبذلك فان $u'^{(1)}_{t+1}$ هو الرأس v. وأخيرا فاننا نحصل على درب P_1 بطول t+2 بين u و v بإضافة الحافة uu'. ونجد أيضا أن الرؤوس الداخلية للدرب P_1 تختلف عن جميع الرؤوس الداخلية للدروب u-v، $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ ، التي حصلنا عليها في المبرهنة 4.2.

والان نعيد عملية الحصول على P_1 بأخذ موقع أخر k_2 فيه $a_{k_2} = b_{k_2}$ فنحصل على دربu- v ، P_2 ، بطول t+2 وأن رؤوسه الداخلية تختلف كلها عن الرؤوس الداخلية لـ P_1 وكذلك عن $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$.

وبتكرار العملية المذكورة على كل موقع من المواقع، والتي عددها m-t نحصل على $P_1, P_2, \dots, P_{m-t}$ المنفصلة داخليا وكل منها بطول t+2 بين الرأسين u و v ومنفصلة داخليا أيضا بالنسبة الى ا لدروب $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$. وبهذا يتم البرهان.

#

مبرهنة4.5: لكل $m \ge 3$ و $2 \le n \le m$ فان

$$W_n(Q_m; x) = 2^{m-1}\left\{x^2 \sum_{i=1}^{n-1}\binom{m}{i}x^i + \sum_{i=n}^{m}\binom{m}{i}x^i\right\}.$$

البرهان:

معروف أن

$$W(Q_m; x) = 2^{m-1}(1+x)^m + 2^{m-1}$$

وبذلك لكل $1 \le i \le m$ ، معامل x^i هو

$$C(Q_m, i) = 2^{m-1}\binom{m}{i} \quad \dots\dots(4.1)$$

مما تقدم في المبرهنتين (4.2) و(4.4) نستنتج أن

عندما $d(u,v) < n$ $\quad d_n(u,v) = d(u,v) + 2\,,$

عندما $d(u,v) \geq n$ $\quad d_n(u,v) = d(u,v),$

$$W_n(Q_m;x) = \sum_{u,v} x^{d_n(u,v)}$$
$$= x^2 \sum_{1 \leq d(u,v) < n} x^{d(u,v)} + \sum_{d(u,v) \geq n} x^{d(u,v)}$$
$$= x^2 \sum_{i=1}^{n-1} C(Q_m,i)x^i + \sum_{i=n}^{m} C(Q_m,i)x^i$$

وبهذا تم البرهان. #

نتيجة4.6: لكل $m \geq 3$ و $2 \leq n \leq m$ فان

$$diam_n Q_m = \begin{cases} m, & when \quad 2 \leq n \leq m-1 \\ m+1, & when \quad n = m \end{cases}$$

البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة4.5

#

نتيجة4.7: لكل $m \geq 3$ و $2 \leq n \leq m$ فان

$$W_n(Q_m) = 2^m \left\{ m\,2^{m-2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} \right\}.$$

البرهان:

بأخذ مشتقة $W_n(Q_m;x)$. بالنسبة إلى x ثم التعويض عنx بواحد نحصل على:

$$W_n(Q_m) = 2^{m-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (i+2)\binom{m}{i} + \sum_{i=n}^{m} i\binom{m}{i} \right\}.$$
$$= 2^{m-1} \left\{ 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} + \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i} \right\}.$$
$$= 2^{m-1} \left\{ 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} + m\,2^{m-1} \right\}.$$

وبهذا يتم البرهان.

#

المصادر

[1] A.S.Aziz;(2007), "**The Width Distance and the w-Wiener Polynomials of a Graph"**, M. Sc. Thesis , Mosul University , Mosul**.**

[2] A.A.Ali ,and A.S.Aziz ,"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs, " Raf.J.of Comp.Sci.,Vol.4, No 2.

[3] F. Buckley and F. Harary ; (1990), **Distance in Graphs** , Addison-Wesley , Redwood.

[4] G. Chartrand and L. Lesniak ; (1986), **Graphs and Digraphs** , Wadsworth Inc. Belmont, California.

[5] I. Gutman ; (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial", Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.

[6] H. Hosoya; (1988)," On Some Counting Polynomials in Chemistry", Discrete Applied Math., 19 ,239-257.

[7] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang ; (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.