# Vertical Flow in Viscous Thin Films

**Khidr M.S. Khidr** — *College of Computer Science and Mathematics*
**Hikmat Sh. Mustafa** — *College of Education*
*University of Mosul, Iraq*

**Received on: 22/04/2007** **Accepted on: 15/08/2007**

**ABSTRACT**

The aim of this paper is to investigate the vertical flow in thin films of an incompressible liquids with no inertia force. Continuity equation and Navier-Stokes equations are used to obtain the equation that governs this type of flow, this equation is solved by using numerical methods to find the thickness of film.

**Keywords:** flow, thin films, incompressible liquids, Continuity equation, Navier-Stokes equations.

# الجريان العمودي في الأغشية الرقيقة اللزجة

**خضر محمد صالح خضر** — *كلية علوم الحاسبات والرياضيات*
**حكمت شريف مصطفى** — *كلية التربية*
*جامعة الموصل، العراق*

**تاريخ استلام البحث :2007/04/22** **تاريخ قبول البحث 2007/08/15**

**الملخص**

يهدف البحث إلى دراسة الجريان العمودي في الأغشية الرقيقة لسوائل غير قابلة للانضغاط بإهمال قوى القصور الذاتي، وقد استخدمت معادلة الاستمرارية ومعادلات نفير–ستوكس للحصول على المعادلة التي تحكم هذا النوع من الجريان، وتم حلها باستخدام طرائق عددية لإيجاد سمك الغشاء.

**الكلمات المفتاحية:** الجريان، الاغشية الرقيقة، سوائل غير قابلة للانضغاط،، معادلة الاستمرارية، معادلات نفير–ستوكس.

## 1.المقدمة : Introduction

إن الرغوة (Foam ) والأغشية الرقيقة (Thin films) التي عادة ما تتكون من هواء وسائل لزج مع الشد السطحي (Surface tension) هي حالة خاصة في ميكانيك الموائع. أن دراسة الأغشية الرقيقة حديثا أخذت طابعا أخر وهو دراسة التأثيرات في سلوك هذه الأغشية، وأن احد هذه التأثيرات هو نحافة الأغشية (Thinness) والتي لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عملية طلاء أسطح الرسم ، الشمع الوقائي والطبقات الفضية على أقرص CD المدمجة. وقد أجريت العديد من الدراسات في هذا النوع من الأغشية.

درس (Tuck, E.O. and L.W. Schwartz, 1990) الطرائق العددية لحل بعض المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثالثة والمتعلقة بطلاء وجريانها الأغشية، ودرس (Moriarty, J.A. and L.W.Shwartz,1991) ألانتشار غير المستقر للأغشية الرقيقة السائلة مع شد سطحي صغير.

كما درس (Majeed,M.A.S,2002) الجريان اللازمني في الأغشية الرقيقة بإهمال قوى القصور الذاتي.

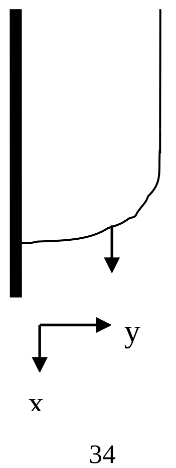
و قام كل من (Richard B.; Olivier, D.; Marcio, G.;Andrew T.; Haris W. and Kerianne Y.) بدراسة الجريان العمودي للأغشية الرقيقة في حالة سائلين، كما درس (Kondic, L. and J.Dies,2001) الجريان في الأغشية الرقيقة عندما تكون الجاذبية هي المسؤولة عن الجريان وتبين بأن خط الاتصال يكون غير مستقر، ودرس (Braum,R.J.,2002) جريان الغشاء السائل الرقيق بإهمال قوى القصور الذاتي، كما درس (Gao;D,N.B.Morley and V. Dhir, 2003) الطرق العددية في جريان الأغشية الساقطة على شكل موجة باستخدام طريقة (VOF)، ودرس (Khider,M.S.Khider,2003) الجريان اللزج في بعض ألأغشية الرقيقة السائلة المائلة.

وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان العمودي في الأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب.

**(2.1) المعادلات التي تحكم الجريان : Governing equations**

ليكن $\bar{q}=(u,v)$ يمثل متجه السرعة للجريان، وأن $v,u$ تمثلان مركبتي السرعة في الاتجاهين $y,x$ على الترتيب و $p$ يمثل الضغط (الضغط الداخلي للسائل).

لتكن $y=h(x,t)$ معادلة السطح الحر للغشاء، حيث أن $h(x,t)$ يمثل سمك الغشاء، وأن الجريان عمودي نحو الأسفل باتجاه الاحداثي $x$ وكما مبين في الشكل (1,1 ).



الشكل (1,1)

مقطع طولي لغشاء رقيق يجري على سطح صلب

نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) << 1$ على المجال $x$ ، وبهذا يمكن إهمال الحد $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$ من معادلة الانحناء التي لها الصيغة الآتية:−

$$k = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(2.2)$$

فتصبح بالصيغة الآتية:−

$$k = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots(2.3)$$

إن المعادلات التي تحكم الجريان في الغشاء العمودي ولنظام ثنائي البعد هي معادلة الاستمرارية والتي لها الصيغة الآتية:−

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \ldots(2.4)$$

ومعادلات حفظ الزخم معادلات (نافير−ستوكس) في الاتجاهين $y,x$ وعلى الترتيب:−

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho g_x \qquad \ldots(2.5)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho g_y \qquad \ldots(2.6)$$

حيث أن $\rho$ يمثل الكثافة ، $\mu$ اللزوجة ، $g$ التعجيل الأرضي.

وباستخدام نظرية التزبيت[1] فأن معادلتي الزخم (2.5) و(2.6) تختزلان إلى الصيغة الآتية:−

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \qquad \ldots(2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \rho g \qquad \ldots(2.8)$$

### (3.1) الشروط الحدودية : Boundary conditions

1. شرط جهد القص : (Tangential stress conditions) على السطح الحر للغشاء عندما $y = h$ فأن

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = 0 \qquad \ldots(3.2)$$

حيث أن : $s$ تمثل القيم على السطح الحر للغشاء .

2. شرط الجهد العمودي : Normal-stress condition: عندما $y = h$ فأن

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots(3.3)$$

حيث أن $\sigma$ يمثل الشد السطحي.

3. شرط عدم الانزلاق : No-slip condition : عندما $y = 0$ فأن

$$u = 0 \qquad \ldots(3.4)$$

4.

$$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad h \to 1 \\ x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad h \to +\infty \end{array}\right\} \qquad \ldots(3.5)$$

باشتقاق الشرط الحدي (3.3) بالنسبة إلى $x$ نحصل على ما يأتي:-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \qquad \ldots(3.6)$$

بمقارنة المعادلة (3.6) مع المعادلة (2.7) نحصل على ما يأتي :-

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \qquad \ldots(3.7)$$

بتكامل المعادلة (3.7) بالنسبة إلى $y$ نحصل على ما يأتي:-

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho g y - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + f(x,t) \qquad \ldots(3.8)$$

حيث أن $f(x,t)$ ثابت التكامل.

بتطبيق الشرط الحدي (3.2) في المعادلة (3.8) عندما $y = h$ نحصل على ما يأتي:-

$$f(x,t) = \rho g h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h \qquad \ldots(3.9)$$

بتعويض المعادلة (3.9) في المعادلة (3.8) نحصل على ما يأتي :-

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho g y - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + \rho g h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h \qquad \ldots(3.10)$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)(h - y) \qquad \ldots(3.11)$$

بتكامل المعادلة (3.11) بالنسبة إلى $y$ نحصل على ما يأتي :-

$$u(x,y,t)=\left(\frac{\rho g}{\mu}+\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)\left(hy-\frac{y^2}{2}\right)+g(x,t) \qquad \ldots(3.12)$$

حيث أن $g(x,t)$ ثابت التكامل.

بتطبيق الشرط الحدي (3.4) في المعادلة (3.12) نحصل على ما يأتي :-

$$g(x,t)=0 \qquad \ldots(3.13)$$

وهكذا فأن المعادلة (3.12) تصبح بالصيغة الآتية:-

$$u(x,y,t)=\left(\frac{\rho g}{\mu}+\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)\left(hy-\frac{y^2}{2}\right) \qquad \ldots(3.14)$$

إن الصيغة التكاملية لمعادلة حفظ الكتلة تعطى بالصيغة [7]:-

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u(x,y,t)dy \qquad \ldots(3.15)$$

حيث أن $Q$ يمثل المعدل الحجمي للجريان.

بتعويض المعادلة (3.14) في المعادلة(3.15) نحصل على ما يأتي :-

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h\left(\frac{\rho g}{\mu}+\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)\left(hy-\frac{y^2}{2}\right)dy \qquad \ldots(3.16)$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho g}{\mu}+\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)\frac{h^3}{3} \qquad \ldots(3.17)$$

أو

$$3\mu\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho g h^3+\sigma h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \qquad \ldots(3.18)$$

والمعادلة ( 3.18) تمثل التوازن بين ثلاث قوى (اللزوجة،الشد السطحي والتعجيل الأرضي).

## (4.1) المتغيرات اللابعدية : Non-dimensional

تعرف المتغيرات $x,h$ بدلالة المتغيرات اللابعدية بالصيغة[7] :-

$$h=\bar{h}H\ ,\quad x=\bar{x}L\ ,\quad t=\bar{t}T \qquad \ldots(4.2)$$

وأن $T=\dfrac{3\mu L}{\rho g H^2}$

بتعويض المتغيرات اللابعدية(4.2) في المعادلة( 3.18) نحصل على ما يأتي :-

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}=-\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{h}^3+\varepsilon^3\bar{h}^3\frac{\partial^3\bar{h}}{\partial\bar{x}^3}\right) \qquad \ldots(4.3)$$

حيث أن $\varepsilon^3 = \frac{\rho H}{\rho g L^3}$ متغير لابعدي وأن $(\varepsilon \le 1)$ ،(الحالة التي فيها $\varepsilon = 1$ )

وباسقاط الرمز (–) من المعادلة (4.3) فأنها تصبح بالصيغة الآتية:–

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 + h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \qquad \ldots (4.4)$$

في حالة اللازمني أي عندما $\left(\frac{\partial h}{\partial t} = 0\right)$ فأن المعادلة(4.4) تصبح بالصيغة :–

$$\frac{d}{dx}\left(h^3 + h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) = 0 \qquad \ldots (4.5)$$

بتكامل المعادلة(4.5) بالنسبة إلى $x$ نحصل على ما يأتي :–

$$h^3 h''' + h^3 = A \qquad \ldots (4.6)$$

أو

$$h''' = -1 + \frac{A}{h^3} \qquad \ldots (4.7)$$

حيث أن $A$ ثابت التكامل .

والمعادلة(4.7) يمكن حلها حسب الشرط الحدي (3.5).وحسب المصدر[10] يمكن الحصول على الشروط الابتدائية عندما $x = 0$ من العلاقة الآتية :–

$$h \to 1 + a\exp\left(\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}x\right) \qquad \ldots (4.8)$$

حيث أن $a$ ثابت اختياري صغير جدا لموازنة العلاقة (4.8).

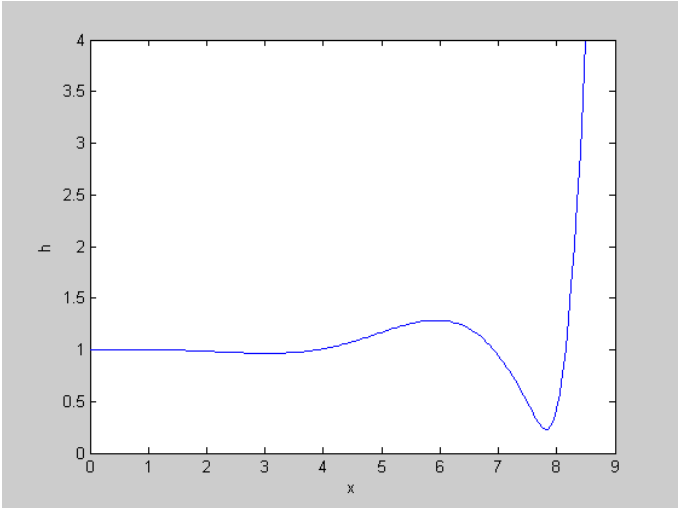
لحل المعادلة(4.7) نحولها إلى نظام المعادلات التفاضلية وذلك بتخفيض رتبة المعادلة نفرض أن :

$$h_1 = h \to h_1 = h' = h_2$$

$$h_2 = h' \to h_2' = h'' = h_3$$

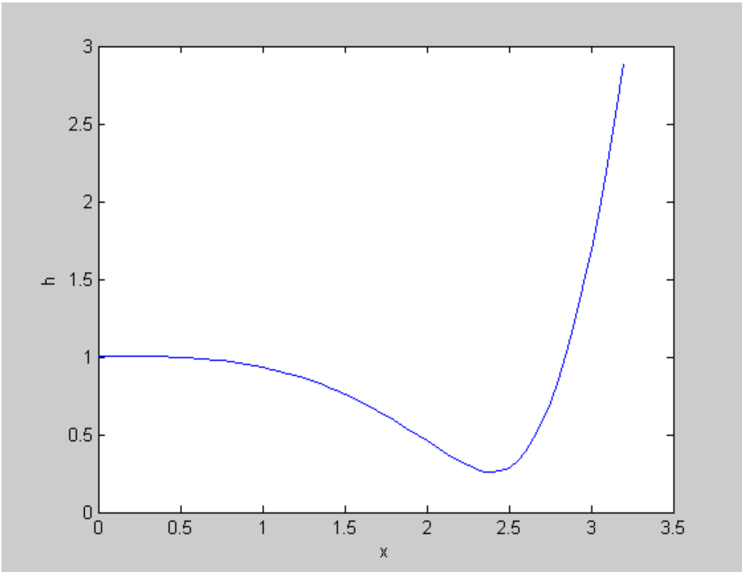
$$h_3 = h'' \to h_3' = h''' = -1 + \frac{A}{h^3}$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي(4.8) عندما $x = 0$ وباستخدام طريقة رنج–كوتا من الرتبة الرابعة في نظام الـ MATLAB نحصل على الحلول الآتية وكما موضحة في الشكل (1.2 ) و(1.3 ) ولقيم مختلفة للثابت $A$ .




الشكل (1.2)

يمثل منحني الحل للمستوي $(x,h)$ للمعادلة (4.7) عندما $A=1$




الشكل (1.3)

يمثل منحني الحل للمستوي $(x,h)$ للمعادلة (4.7) عندما $A=0.5$

**الاستنتاجات : Conclusion**

في هذا البحث تمت دراسة جريان الاغشية الرقيقة اللزجة بصورة عمودية في نظام ثنائي البعد وتبين من حلول المعادلة(4.7) أن سمك الغشاء يقترب من المالانهاية( $h \to \infty$ ) لقيم $x$ الموجبة، وأن سمك الغشاء يقترب من الواحد( $h \to 1$ ) لقيم $x$ السالبة.

## المصادر


[1] ستريتر. فكتورل ، بنيامين. ويلي ،"ميكانيك الموائع" ، ترجمة : نبيل زكي مرقص وفوزي ابراهيم ، جامعة صلاح الدين ، 1984 .

[2] Braum,R.J. (2002). "Thin fluid film drainage" $6^{th}$ PIMS Graduate Industrial Math Modelling Camp, Version of December 4.

[3] Gao;D,N.B.Morley and,V.Dhir, (2003) "Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method" Journal of computational Phyiscs 192 PP.624-642.

[4] Khider,M.S.Khider, (2003) "Viscous flow in certain inclined thin liquid films" M.Sc.thesis,University of Mosul.

[5] Kondic, L. and J.Dies, (2001) "Pattern formation in the flow of thin films down an incline: Constant flux configuration" Phys. Fluids, Vol 13, No 11.

[6] Majeed,M.A.S, (2002) "Steady flow in thin liquid films with negligible inertia" M.Sc.thesis, University of Mosul.

[7] Moriarty, J.A. and L.W.Shwartz. (1991)." Unsteady spreading of thin liquid films with small surface tension" Phys. Fluids A 3(5),May.

[8] Richard B.; Olivier, D.; Marcio, G.;Andrew T.; Haris W and Kerianne Y, "Vertical draining of thin films:Two fluids case".

[9] Schwartz, L.W. and R.V. Roy (1999) "Modeling draining flow in mobile and immobile soap films" Journal of Colloid and interface Science 218,pp309-323.

[10] Tuck, E.O. and L.W.Schwartz, (1990) "A Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows" SIM,Vol 32, No.3,pp.453-469.